



Federação das Indústrias do Estado da Bahia

FACULDADE DE TECNOLOGIA SENAI CIMATEC

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM GESTÃO E
TECNOLOGIA INDUSTRIAL (PPG-GETEC)**

ZOROASTRO FERNANDES FILHO

**COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES
ATRAVÉS DE MODELOS VISCOELÁSTICOS – UMA
ANÁLISE COMPARATIVA**

Salvador

2017

ZOROASTRO FERNANDES FILHO

**COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES ATRAVÉS
DE MODELOS VISCOELÁSTICOS – UMA ANÁLISE
COMPARATIVA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu da Faculdade Tecnologia SENAI CIMATEC como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Gestão e Tecnologia Industrial

Orientador: Prof.Dr. Alex Álisson Bandeira Santos
Co-Orientador: Prof M. Sc Ubatan Miranda

Salvador
2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC

F345c Fernandes Filho, Zoroastro

Comportamento dinâmico de rotores através de modelos viscoelásticos: uma análise comparativa / Zoroastro Fernandes Filho. – Salvador, 2017.

93 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Alex Álisson Bandeira Santos.
Coorientador: Prof. MSc. Ubatan Almeida Miranda.

Dissertação (Mestrado em Gestão e Tecnologia Industrial - GETEC) – Programa de Pós-Graduação, Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC, Salvador, 2017.

Inclui referências.

1. ADF. 2. Método Rayleigh-Ritz. 3. Rotor. 4. Viscoelasticidade. I. Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC. II. Santos, Alex Álisson Bandeira. III. Miranda, Ubatan Almeida. IV. Título.

CDD: 658.5

ZOROASTRO FERNANDES FILHO

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES ATRAVÉS
DE MODELOS VISCOELÁSTICOS – UMA ANÁLISE
COMPARATIVA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Gestão e Tecnologia Industrial pelo Centro Universitário SENAI Bahia
– Campus CIMATEC

Aprovada em 24 de agosto de 2017.

Banca Examinadora

Orientador: Prof. Dr. Alex Álisson Bandeira Santos - SENAI CIMATEC
Doutor em Energia e Ambiente pela Universidade Federal da Bahia, Salvador -
BA, Brasil

Co-Orientador: Prof. M.Sc. Ubatan Almeida Miranda - SENAI CIMATEC
Mestre em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual de Campinas,
Campinas - SP, Brasil

Membro externo : Prof. Dr. Juan Carlos Romero Albino - SENAI CIMATEC
Doutor em Engenharia Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de
Janeiro (PUC-RJ), Rio de Janeiro - RJ, Brasil

Membro externo: Prof. Dr. Abdon Tapia Tadeo - Universidade Federal do
Recôncavo da Bahia (UFRB)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual de Campinas
(UNICAMP), Campinas - SP, Brasil

Dedico este trabalho a meus queridos pais Zoroastro e Jacy, e a minha querida tia Elza, pelo amor e plena dedicação que recebi ao longo da minha existência

AGRADECIMENTOS

O agradecimento ! A parte mais importante de uma realização...

À minha querida e amada esposa Teresa, pelo incentivo e carinho constante ao longo desta jornada,

Aos meus orientadores, Alex e Ubatan, pelo respeito, disponibilidade, paciência e capacidade de conciliar minhas dificuldades com as exigências deste trabalho, pelos conselhos mais que úteis para o meu desenvolvimento,

Ao CIMATEC, seu corpo funcional e sua estrutura, o qual a Bahia deve ter orgulho de possuir, contribuindo para o futuro do estado..

À família, pela compreensão pelos momentos de falta durante a realização deste trabalho

Aos colegas de turma do GETEC

RESUMO

Materiais viscoelásticos são largamente produzidos e utilizados na indústria, e as técnicas de modelagem dos seus comportamentos são úteis para aplicação em problemas de amortecimento de vibração associados a rotores e sistemas estruturais, contribuindo para o desenvolvimento de modelos mecânicos compactos e eficientes. Para a redução de peso dos rotores os materiais poliméricos podem ser utilizados em sua construção. Diante desta realidade, o objetivo do trabalho é apresentar dois modelos numéricos para descrever o comportamento dinâmico de rotores sob regime viscoelástico, avaliando e comparando seus desempenhos. As equações do movimento foram obtidas a partir da abordagem ADF, introduzida nas equações de Lagrange partindo-se de um operador diferencial no domínio do tempo. A aproximação de Rayleigh-Ritz foi utilizada para obtenção das equações de movimento. Análises comparativas de rotores em PVC e alumínio são realizadas a partir dos resultados da resolução numérica dos sistemas, mostrando que o primeiro dos modelos obteve uma boa aproximação para o alumínio enquanto que o último obteve uma boa aproximação para o PVC, denotando que suas utilizações são extremamente dependentes do grau de amortecimento dos materiais utilizados.

Palavras-chave: ADF, Rotor, Viscoelasticidade

ABSTRACT

Viscoelastic materials are widely produced and used in industry, and their modeling techniques are useful for application in vibration damping problems associated with rotors and structural systems, contributing to the development of compact and efficient mechanical models. For the reduction of the weight of the rotors the polymeric materials can be used in its construction. In view of this reality, the objective of this work is to present two numerical models to describe the dynamic behavior of viscoelastic rotors, evaluating and comparing their performances. The equations of motion were obtained from the ADF approach, introduced in the Lagrangian equations starting from a differential operator in the time domain. The Rayleigh-Ritz approximation was used to obtain the equations of motion. Comparative analysis of PVC and aluminum rotors are performed based on the results of the numerical resolution of the systems. The first model got a good approximation for the aluminum, while the latter a good approximation for the PVC, denoting that its application is extremely dependent on the degree of damping of the materials used.

Keywords: ADF, Rotor, Viscoelasticity

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama de Campbell.....	10
Figura 2 - Representação do Princípio da superposição de Boltzmann	13
Figura 3: Modelos fundamentais de osciladores - a) Hooke, b) Newton, c) Voigt, d) Maxwell	16
Figura 4 - a) Mola em série com Voigt; b) Mola em paralelo com Maxwell; c) Amortecedor em série com Voigt; d) Amortecedor em paralelo com Maxwell .	19
Figura 5 - Aparato experimental utilizado por Kimball/Newkirk	22
Figura 6: Vibração livre amortecida – Sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade	23
Figura 7 - Curva força-deslocamento para o movimento harmônico amortecido	24
Figura 8 - Representação do modelo ADF com 1 campo anelástico	29
Figura 9 - Seção transversal do eixo	30
Figura 10 - Modelo geométrico de rotor	34
Figura 11 - PVC : Ajuste do fator de perda e módulo complexo.....	46
Figura 12 - PVC endurecido – Dois campos ADF - Ajuste do fator de perda e do módulo complexo	47
Figura 13 - PVC e PVC endurecido – Comparativo entre os fatores de perda e módulo de elasticidade.....	48
Figura 14 - VLE e diagrama de Campbell – Rotor em alumínio - Modelo H.....	51
Figura 15 - VLE : Rotor em alumínio - Modelos 2C e 1C	51
Figura 16 - VLE : Rotor em alumínio - Modelos 2S e 1S.....	52
Figura 17 - Diagramas de Campbell - Rotor em alumínio - Modelos 2C e 1C .	52
Figura 18 - Diagramas de Campbell – Rotor em alumínio - Modelos 2S e 1S .	52
Figura 19: UBR – Rotor em alumínio a) 1S x 2S x H e b) 1C x 2C x H	54
Figura 20: Órbitas - Rotor em alumínio – Modelo H - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE, e c) 5% acima da VLE.	54
Figura 21: Órbitas - Rotor em alumínio – Modelo 1S - a) 5% abaixo da VLE, b) À VLE, e c) 5% acima da VLE.....	55
Figura 22: Órbitas - Rotor em alumínio – Modelo 2S - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE, e c) 5% acima da VLE.	55

Figura 23 - VLE's - Rotor em PVC	57
Figura 24 - VLE's – Rotor em PVC - Modelos 2C e 1C	57
Figura 25 - Diagramas de Campbell - Rotor em PVC - Modelos 2S e 1S	57
Figura 26 - Diagramas de Campbell - Rotor em PVC - Modelos 2C e 1C.....	57
Figura 27 - UBR : Rotor em PVC a) 1C x 1S e b) 2C x 2S.....	58
Figura 28 - Órbitas - Rotor em PVC – Modelo 1C - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE e c) 5% acima da VLE	59
Figura 29 - Órbitas - Rotor em PVC – Modelo 2C - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE e c) 5% acima da VLE.	59
Figura 30 - VLE's - Rotor em PVC - Modelos 2C e 2S	60
Figura 31 - Diagrama de Campbell - Rotor em PVC endurecido - Modelo 2C .	61
Figura 32 - Diagrama de Campbell - Rotor em PVC endurecido - Modelo 2S .	61
Figura 33 - UBR – Rotor em PVC endurecido - Modelo 2C – 20 a 1000 RPM.	62
Figura 34 - UBR – Rotor em PVC endurecido - Modelos 2C x 2S – 20 a 30000 RPM	63
Figura 35 - Órbitas – Rotor em PVC endurecido - Modelo 2C - a) 5% abaixo da VLE b) VLE e c) 5% acima da VLE.	63
Figura 36 - Órbitas - Rotor em PVC endurecido - Modelo 2S - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE, e c) 5% acima da VLE.	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 : Tipos de viscoelasticidade em função da taxa de fluência e do módulo do material.....	16
Tabela 2 : Alumínio - Parâmetros viscoelásticos - 1 campo ADF.....	45
Tabela 3: Alumínio - Parâmetros viscoelásticos - 2 campos ADF.....	45
Tabela 4: Parâmetros viscoelásticos para o PVC.....	46
Tabela 5: PVC endurecido - Parâmetros viscoelásticos – 2 Campos ADF.....	47
Tabela 6: Rotor em alumínio-Parâmetros geométricos.....	50
Tabela 7: Rotor em alumínio - Diferenças % relativas das VLE's dos modelos ADF em relação ao modelo H.....	53
Tabela 8 : Parâmetros geométricos do rotor em PVC.....	56
Tabela 9 - VLE's (RPM) : Rotor em PVC à 20°C - Modelos 1S, 1C, 2S e 2C..	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1C	Rotor modelo ADF com 1 campo anelástico
2C	Rotor modelo ADF com 2 campos anelásticos
1S	Rotor modelo ADF com 1 campo anelástico, caso especial
2S	Rotor modelo ADF com 2 campos anelásticos, caso especial
ADF	Anelastic Displacement Field
ATF	Augmenting Thermodynamic Field
ISO	International Standard Organization
GHM	Golla-Hughes-McTavish
PVC	Polivinilcloro
UBR	Unbalance Response
VLE	Velocidade Limite de Estabilidade

LISTA DE SÍMBOLOS

ε	Função de deformação
ε^A	Função de deformação anelástica
$\bar{\varepsilon}^A$	Deformação anelástica de equilíbrio
σ	Função de tensão uniaxial
σ^A	Função de tensão uniaxial anelástica
s	Variável complexa
t	Variável tempo
t_0	Tempo inicial
τ	Variável tempo deslocada
T	Período
Δ	Varição entre dois valores de uma variável
J	Função de fluência
J_e	Compliança de equilíbrio
J_g	Compliança vítrea
E	Módulo
E_e	Módulo de equilíbrio
E_g	Módulo vítreo
k	Constante elástica
μ	Constante viscosa
$\delta(t)$	Função Delta
a	Coefficiente da taxa de variação de tensão
$\frac{d^k}{dt^k}$	Operador diferencial de ordem k
p, q	Ordem da equação constitutiva
m, n	Coefficientes da equação constitutiva
$E(s)$	Módulo complexo de elasticidade
φ	Frequência de excitação
δ	Decremento logaritmico
η	Fator de perda

A	Área de uma seção plana
y_0	Amplitude máxima do movimento harmônico
f	Força harmônica
W	Trabalho realizado por ciclo de movimento harmônico
ΔW	Trabalho dissipado por ciclo de movimento harmônico
H	Energia livre de Helmholtz
ω_0	Frequência natural do movimento harmônico
α	Inverso do tempo de relaxação no movimento harmônico
β	Ângulo de deformação no experimento de Kimball
i	Unidade imaginária
b	Inverso do tempo de relaxação (modelo ADF)
c	Razão entre os módulos reais anelástico e elástico
S	Constante de proporcionalidade
D	Operador diferencial $\frac{d}{dt}$
r_0	Raio externo do eixo
r	Raio em um ponto qualquer da seção transversal do eixo
d_l	Distância da massa desbalanceadora em relação ao centro da seção
m_u	Massa desbalanceadora do disco
I	Momento de inércia da seção do eixo
M_D	Massa do disco
I_{Dx}	Momento de inércia do disco na direção x
I_{Dy}	Momento de inércia do disco na direção y
h	Espessura do disco
L	Comprimento do eixo
L_l	Posição do disco no eixo
R_l	Raio interno do disco/Raio do eixo
R_2	Raio externo do disco
T_s	Energia cinética do eixo
T_D	Energia cinética do disco

T_u	Energia cinética da massa desbalanceadora
U_T	Energia de deformação do eixo
T_R	Energia cinética total do conjunto rotativo
U_T	Energia de deformação total do eixo
ρ	Densidade do material
Ω	Velocidade angular do eixo
ω	Velocidade de precessão do eixo
U, u	Deslocamento discretizado e deslocamento ao longo do eixo x
W, w	Deslocamento discretizado e deslocamento ao longo do eixo z
θ_x	Deslocamento angular em torno do eixo x
θ_z	Deslocamento angular em torno do eixo z
p	Número de campos ADF
u_T	Densidade de energia de deformação do eixo
V	Trabalho virtual de força externa
P	Potencial generalizado
P_U	Força de excitação na direção U
P_W	Força de excitação na direção W
F	Força generalizada
$H(s)$	Função de transferência
$[I]$	Matriz identidade
$[0]$	Matriz nula
$\{T\}$	Vetor dos deslocamentos laterais
$\{B\}$	Função objetivo
ξ	Desvio percentual da função objetivo
0^+	Aproximação pela parte positiva da abcissa
0^-	Aproximação pela parte negativa da abcissa
$'$	Derivada em relação à direção y
\cdot	Derivada em relação ao tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	DEFINIÇÕES DO PROBLEMA	6
1.2	OBJETIVOS	7
1.2.1	Objetivo geral	7
1.2.2	Objetivos específicos:	7
1.3	IMPORTÂNCIA DA PESQUISA	8
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1	COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES	9
2.2	COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO	11
2.2.1	Modelos lineares de viscoelasticidade	12
2.2.1.1	O modelo integral.....	12
2.2.1.2	O modelo diferencial	16
2.3	COMPORTAMENTO HISTERÉTICO E MEDIDAS DE AMORTECIMENTO	21
2.3.1	Dissipação por ciclo	23
2.3.2	Fator de perda.....	24
2.3.3	Decremento logaritmico	25
3	MÉTODO	25
3.1	MODELO ADF	26
3.1.1	Modelo ADF – Caso particular	29
3.1.2	Modelo Histerético.....	33
3.2	MODELAGEM DO ROTOR.....	34
3.2.1	Energia cinética.....	34
3.2.2	Energia de deformação e forças generalizadas	35
3.2.3	Aplicação do método de Rayleigh-Ritz.....	36
3.2.4	Equações do movimento – Modelo ADF	38
3.2.5	Equações do movimento – Modelo ADF caso particular.....	40
3.2.6	Equações do movimento – Modelo histerético.....	41
3.3	DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS VISCOELÁSTICOS.....	42
3.3.1	Parâmetros viscoelásticos - Alumínio.....	43
3.3.2	Parâmetros viscoelásticos – PVC	46
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	49

4.1	DIAGRAMAS DE CAMPBELL, UBR E VLE	50
4.1.1	Rotor em alumínio – VLE e Diagramas de Campbell	50
4.1.2	Rotor em alumínio – UBR	53
4.1.3	Rotor em alumínio – Órbitas	54
4.1.4	Rotor em alumínio – Resumo.....	56
4.1.5	Rotor em PVC – VLE e Diagramas de Campbell	56
4.1.6	Rotor em PVC – UBR.....	58
4.1.7	Rotor em PVC – Órbitas.....	59
4.1.8	Rotor em PVC endurecido – VLE´s e diagrama de Campbell.....	59
4.1.9	Rotor em PVC endurecido – UBR.....	61
4.1.10	Rotor em PVC endurecido – Órbitas.....	63
4.1.11	Rotor em PVC – Resumo.....	64
5	CONCLUSÕES.....	66
5.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	68
5.2	ATIVIDADES FUTURAS DE PESQUISA	69
	REFERÊNCIAS.....	70

1 INTRODUÇÃO

A simulação dinâmica de materiais viscoelásticos não é trivial. Entretanto tais materiais são largamente produzidos e utilizados na indústria, onde as técnicas de previsão dos seus comportamentos dinâmicos são úteis para aplicação em problemas de amortecimento de vibrações, contribuindo para o desenvolvimento de sistemas mecânicos compactos e eficientes. O amortecimento em si é a própria dissipação de energia mecânica, ocorre no campo térmico e é produzido por forças não conservativas.

Quanto à sua origem, o amortecimento pode ser classificado como externo ou interno. O amortecimento externo, causado por forças que atuam sobre o sistema, pode ser bem exemplificado pelo atrito direto de um rotor com um fluido ou com componentes externos, enquanto que o amortecimento interno por fenômenos físicos intimamente relacionados com a estrutura do material, ou ainda, pela fricção (micro movimentos) entre subcomponentes aparentemente rígidos montados por interferência mecânica ou aparafusados, nesse caso denominado de amortecimento estrutural.

É usual a simulação dinâmica de rotores metálicos admitindo-se resposta elástica das tensões em relação às deformações. A hipótese de Hooke aplicada aos metais é o modelo clássico utilizado nas equações de movimento dos rotores, concordando com a maioria das aplicações práticas.

No campo industrial, para a redução de peso dos rotores, materiais de comportamento tipicamente viscoelástico, como os polímeros, podem ser utilizados em sua construção sendo o baixo peso a principal vantagem de uso. Nesses materiais, quando submetidos a cargas dinâmicas, parcelas da energia de deformação são simultaneamente conservadas e dissipadas e, portanto, disponíveis para o controle e atenuação de vibrações. Conseqüentemente, o comportamento dinâmico desta categoria de rotores merece ser investigado e não raramente trabalhos podem ser encontrados na literatura recente. Como principal desvantagem, materiais viscoelásticos não possuem razão peso-rigidez da mesma ordem de grandeza dos metais, mas podem ser combinados com compósitos para a obtenção das propriedades requeridas em rotores para aplicações industriais.

Para uma operação eficiente, confiável e segura, as máquinas rotativas devem operar com níveis de vibração menores que os limites de segurança. Materiais viscoelásticos aplicados em sistemas mecânicos não rotativos reduzem suas vibrações, entretanto fenômenos totalmente distintos ocorrem quando da aplicação na construção dos rotores. No primeiro caso somente forças dissipativas atuando no modo estacionário, como por exemplo, em suportes, ajudam a reduzir a vibração. Já no caso de forças oriundas do amortecimento associado ao material do rotor, surgidas durante sua rotação, nem sempre atuarão no sentido de atenuar as vibrações e poderão até adicionar energia desestabilizando a órbita do eixo (ROY, 2016, p.87).

Neste contexto, o projeto dos sistemas rotativos é uma das áreas onde se observam maiores exigências, dada sua importância estratégica em indústrias como as de geração de energia elétrica, de exploração e refino de petróleo, nuclear e aeroespacial (SALDARRIAGA, 2007, p.1). Atualmente, materiais compósitos vêm sendo incorporados com sucesso nos rotores, principalmente na indústria aeroespacial e automobilística, resultado dos esforços dos pesquisadores em prover ferramental teórico para predição do seu comportamento em aplicações práticas. Diversos pesquisadores, dentre outros, motivados pela construção de modelos matemáticos relacionando tensão e deformação representaram o comportamento viscoelástico dos materiais:

- Modelos baseados em derivadas fracionárias foram propostos por BAGLEY e TORVIK (1983), PADOVAN, (1987) e GOLLA e HUGHES (1985) *apud* ROY (2016). O modelo derivado fracional é mostrado na Eq.(1). Neste modelo, considerando estado de tensões unidimensional, a relação entre tensão e deformação assume a forma (LIMA, 2003, pg 2);

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^p b_k D^{\beta_k} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^q E_k D^{\alpha_k} \varepsilon(t) \quad (1)$$

onde p e q são números inteiros enquanto que α_k e β_k são números fracionários representando a ordem (não inteira) das derivadas. Observações experimentais mostraram que o comportamento de muitos

materiais viscoelásticos pode ser modelado utilizando-se apenas um termo em cada um dos somatórios da equação ($p = q = 1$). Portanto, para a caracterização do material é necessário determinar cinco parâmetros (α , β , E_0 , E_1 e b). Assim, no domínio de Laplace a expressão do módulo complexo do material pode ser expresso como (LIMA, 2003, pg 2)

$$E(s) = \frac{E_0 + E_1 s^\alpha}{1 + b s^\beta} \quad (2)$$

- O modelo de GOLLA-HUGHES foi estendido por McTAVISH e HUGHES (1993) *apud* ROY (2016) e batizado de GHM (Golla-Hughes-McTavish). Neste modelo são introduzidas variáveis dissipativas. O módulo do material é representado no domínio de Laplace, podendo ser interpretado como uma combinação de “mini-osciladores”, levando o problema à equações de movimento que dependem do número de mini-osciladores adotados. Na sua forma padrão, utilizando apenas um mini-oscilador, o sistema de equações é de segunda ordem. O módulo do material é expresso sob a forma

$$E_G(s) = E \left(1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \quad (3)$$

assemelhando-se à função de transferência de um sistema amortecedor com um grau de liberdade em série, onde o módulo complexo de relaxação de cada oscilador é determinada por três parâmetros positivos (α_i , ζ_i e ω_i), (LIMA, 2003, pg 2). N_G é a quantidade de mini-osciladores;

- Modelos termodinâmicos baseados em campos de deformação simples ou múltiplos foram propostos por LESIEUTRE (1990), LESIEUTRE e MIGNORI (1990) *apud* ROY (2016), introduzidos para levar em conta a dissipação, e denominado modelo ATF (*Augmenting Thermodynamic Field*).

Observando a importância física das variáveis de estado interno da ciência dos materiais, LESIEUTRE (1989) *apud* (HANSEN, 1990, pg. 11)

introduziu campos termodinâmicos aumentados para interagir com o campo de deformação da dinâmica do contínuo, utilizando a termodinâmica irreversível para desenvolver equações diferenciais parciais acopladas e chegar às equações constitutivas, inicialmente considerando uma viga esbelta submetida à flexão simples harmônica. Durante os ciclos de deformação, cada semi-seção longitudinal da viga sofre dilatações e compressões alternadamente, acompanhadas de tensões e mudanças de volume. Para satisfazer o equilíbrio de energia, as temperaturas também aumentam ou diminuem conforme à diminuição (compressão) ou aumento (tração) do volume de cada metade da viga. O resultado final é um fluxo de calor por condução ao longo do eixo longitudinal, causando mudanças de temperatura com o tempo ao longo da viga, conjugadas com as tensões descritas na equação constitutiva (HANSEN, 1990, pg. 13).

Introduz-se um único campo termodinâmico aumentado (ATF). O campo de tensões é termodinamicamente conjugado com o de deformação assim como também com um campo de afinidade. Da termodinâmica irreversível, a afinidade pode ser interpretada como a força generalizada que leva o campo ATF ao equilíbrio. O acoplamento entre os campos ATF e de deformação é definido como uma propriedade do material. Quando não há acoplamento, o material é puramente elástico (HANSEN, 1990, pg. 15).

- O modelo ADF (*Anelastic Displacement Field*) evoluiu a partir do modelo ATF por LESIEUTRE e BIANCHINI (1995) e LESIEUTRE et al. (1996) *apud* ROY (2016).

Nos modelos ATF e ADF campos anelásticos simples ou múltiplos podem ser considerados para melhorar a previsibilidade do comportamento dinâmico. Tais modelos utilizam variáveis (denominadas internas) que descrevem aspectos da estrutura interna dos materiais, associados com os efeitos irreversíveis da dissipação de energia.

Os modelos citados descrevem equações constitutivas que relacionam tensão e deformação, que análoga e fisicamente podem ser representadas pela combinação de elementos de mola e amortecedores, denotando comportamento

viscoelástico linear em maior ou menor escala, dependentes ou independentes da frequência de excitação, tornando a hipótese elástica um caso particular. Todos os modelos são válidos apenas para pequenas deformações. Resumos explicativos desses modelos podem ser encontrados em LIMA (2016).

Por outro lado, para a predição do comportamento de rotores, é necessário combinar as equações constitutivas com as da dinâmica da rotação determinando, dentre outros parâmetros, velocidades críticas, limites de estabilidade, resposta dinâmica, órbitas e demais características do sistema. Diversos pesquisadores estudaram o comportamento de rotores sob regime viscoelástico. Aqui, a tensão não é somente proporcional à deformação como na hipótese “Hookeana”, mas em geral a tensão e suas derivadas são proporcionais à deformação assim como também às suas derivadas (ROY, 2016, p.88).

Durante o movimento de rotação do rotor, o amortecimento interno causa forças tangenciais proporcionais à velocidade de rotação, provocando instabilidade e substancial influência no desempenho dinâmico. Modelos matemáticos acurados são essenciais no sentido de capturar essas perturbações (ROY, 2016, pg.89).

TONDL (1965), KRAMER (2103), JEI e KIM (1993), DUTT e NAKRA (1995) e GENTA (2007) *apud* ROY (2016, pg. 89) utilizaram modelos com amortecimento viscoso através de massas concentradas num eixo contínuo para o estudo do comportamento dos rotores enquanto que ÖZGÜVEN e ÖZKAN (1984) utilizaram a técnica de elementos finitos levando em conta a natureza viscosa e histerética do material do rotor. COMBESCURE e LAZARUS (2008) refinaram a técnica de elementos finitos para a análise dinâmica de grandes máquinas rotativas. Entretanto, LESIEUTRE e MINGORI (1990) *apud* ROY (2016) afirmam que os modelos viscoso e histerético não são suficientes para prever o real comportamento dinâmico dos rotores.

Não foram encontradas muitas referências no passado de modelos viscoelásticos generalizados aplicados em dinâmica de rotores. ROY (2008) *et al.* introduziu o modelo ATF em rotores num contexto de elementos finitos. Posteriormente o estudo foi estendido por FRISWELL (2010) *et al.* DUTT e ROY (2011) propuseram um operador diferencial para obter as equações do movimento do rotor utilizando elementos de viga de Timoshenko, e em seguida estendido por CHANDRAKER (2013) *et al.* O mesmo conceito foi utilizado por

ROY (2016) para o desenvolvimento de modelos para rotores compostos por uma matriz viscoelástica reforçados por elementos longitudinais também viscoelásticos, aplicados em eixo em PVC reforçado por matriz unidirecional em fibra de carbono.

ROY (2016), implementou um modelo de equações de movimento através da técnica de elementos finitos, aplicando-se o modelo de deformação ADF com 1 e 2 campos anelásticos em diversas temperaturas, para rotores em PVC e PVC reforçados com fibras de grafite, obtendo-se as condições de ocorrência de instabilidade, resposta ao desbalanceamento e outros resultados.

Este trabalho também implementa modelos de equações do movimento conforme o método ADF, porém utilizando a aproximação de Rayleigh-Ritz sob duas hipóteses distintas : 1) Modelos “C” - Deformação na superfície externa do eixo em estado transiente ou estacionário durante o movimento de rotação e 2) Modelos “S” - Deformação da superfície externa do eixo em estado estacionário durante o movimento de rotação.

1.1 DEFINIÇÕES DO PROBLEMA

Na grande maioria das vezes a máxima redução do peso dos rotores de turbomáquinas deve ser buscada. Melhorias como a estabilidade operacional e a redução do consumo de energia, por exemplo, são consequências imediatas dessa busca. O crescente desenvolvimento dos materiais aplicados à indústria influencia diretamente os pesquisadores no sentido de ampliar sua utilização nos mais diversos setores. Máquinas rotativas são fundamentais na vida diária, são ativos primordiais nos principais setores produtivos, e conseqüentemente motivo de grande interesse.

A pesquisa do efeito das propriedades dinâmicas de materiais viscoelásticos aplicados em rotores é relativamente recente, e tem motivado sua exploração, investigação e o aprendizado. Modelos analíticos que combinam a dinâmica dos rotores e o processo de deformação viscoelástico são implementados obtendo-se uma alternativa prática de previsão do comportamento dos conjuntos rotativos.

Rotores implementados por LALLANE (1998, pg.12) e ROY (2016, pg.11) são utilizados como referência para comparação e/ou validação dos modelos envolvidos neste trabalho.

As equações constitutivas do material do eixo são obtidas no domínio do tempo, combinadas com a mecânica Lagrangeana para obtenção das equações do movimento do rotor. As diferenças entre os modelos são identificadas e analisadas.

1.2 OBJETIVOS

Procura-se realizar nesse trabalho um estudo analítico sobre a aplicação dos materiais viscoelásticos na construção dos rotores, descrevendo o comportamento dinâmico de conjuntos rotativos em alumínio e PVC. Os objetivos da pesquisa dividem-se em gerais e específicos.

1.2.1 Objetivo geral

Realizar um estudo comparativo dos comportamentos dinâmicos de rotores em materiais viscoelásticos em maior ou menor escala, utilizando o PVC e alumínio como representantes destas duas categorias. Utilizar o modelo ADF com um e dois campos anelásticos para prever o comportamento dinâmico.

1.2.2 Objetivos específicos:

- i) Implementar os modelos ADF e hysterético obtendo as equações constitutivas dos materiais aplicados;
- ii) Obter as equações do movimento utilizando equações de Lagrange e operadores diferenciais introduzidos por ROY (2016);
- iii) Calcular a órbita do centro do disco;
- iv) Calcular as velocidades críticas do sistema;
- v) Calcular a VLE;
- vi) Comparar e analisar os resultados

Neste trabalho é introduzido um modelo a partir do método ADF, aqui denominado “S”, onde as equações de movimento dos rotores resultam em equações diferenciais ordinárias lineares de 2ª ordem, independentemente do número de campos ADF adotado nas equações constitutivas.

Por motivo de simplificação, destacando somente os efeitos do amortecimento interno, todos os modelos desenvolvidos contemplam apenas mancais rígidos.

1.3 IMPORTÂNCIA DA PESQUISA

As referências de trabalhos em dinâmica de rotores utilizando materiais viscoelásticos vem aumentando ao longo dos anos. Já não é incomum encontrar no mercado equipamentos rotativos totalmente construídos em polímeros. A crescente introdução de materiais compósitos como matéria prima industrial exige que métodos de predição do seu comportamento dinâmico sejam maturados e difundidos, permitindo expandir as aplicações desses materiais. É um tema que desperta a atenção devido ao crescimento potencial em aplicações.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

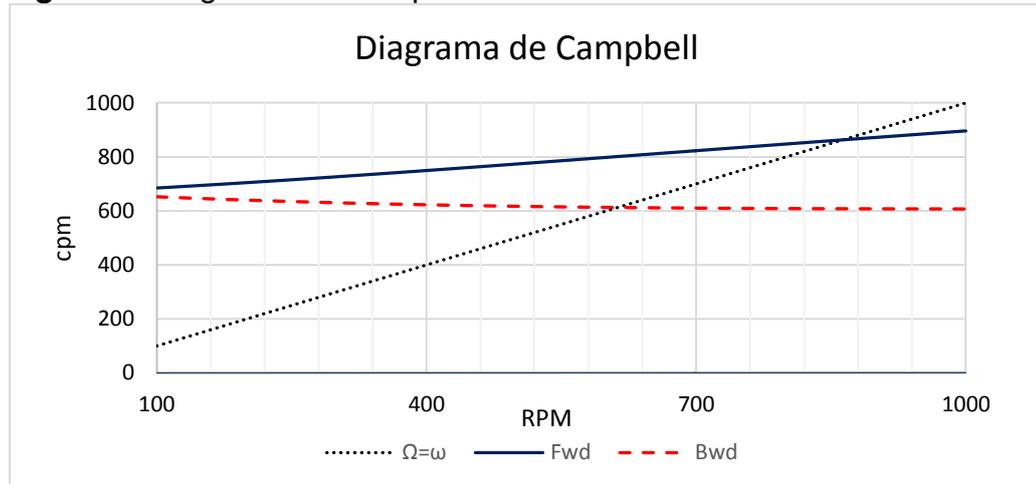
O trabalho abrange a aplicação da teoria básica da dinâmica de rotores em materiais viscoelásticos. Assim, a revisão bibliográfica tem como objetivo esclarecer os conceitos básicos sobre o comportamento dinâmico de rotores, os fenômenos envolvidos na estabilidade dinâmica e em seguida, uma revisão dos conceitos associados às propriedades de amortecimento e viscoelasticidade dos materiais.

2.1 COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES

O comportamento dinâmico básico de um rotor pode ser descrito por parâmetros obtidos a partir das equações do movimento:

- **Órbita**: Permite visualizar a direção e o sentido do movimento lateral do eixo em relação à sua linha de centro não deformada. Quando observada em um osciloscópio, a órbita é a forma da linha de centro do rotor durante a ocorrência de vibrações laterais, informação muito importante para a análise dinâmica (MUSZYNSKA, 2005, p. 10).
- **Velocidades críticas laterais**: Em termos gerais é qualquer velocidade de rotação associada a grandes amplitudes de vibração. Para o caso dos rotores são calculadas equacionando-se a velocidade de rotação do eixo com suas frequências naturais, associadas às rotações. Pode também ser definida quando a velocidade de rotação corresponde a frequência de ressonância lateral do rotor, excitada pelo desbalanceamento (MUSZYNSKA, 2005, pg 1034). A identificação é imediata através do diagrama de Campbell, (NELSON, 2007, pg 4), que relaciona a variação das frequências naturais do rotor com a velocidade de rotação.

A Fig. 1 contém um exemplo do diagrama de Campbell. As velocidades críticas são identificadas através da intersecção das linhas que representam as frequências naturais do sistema (linhas azuis, representando a precessão retrógrada e vermelhas, precessão direta) com a linha síncrona (linha pontilhada). Estes pontos são análogos à ressonância em um sistema estacionário (NELSON, 2007, pg 4).

Figura 1: Diagrama de Campbell

- **Resposta dinâmica ao desbalanceamento (UBR)**: Corresponde a amplitude e fase da órbita síncrona do rotor à uma dada velocidade, causada pela força dinâmica devido ao desbalanceamento (MUSZYNSKA, 2005, pg 1052). São construídos gráficos de resposta da amplitude ao desbalanceamento em função da velocidade do rotor, e nesse sentido é possível calculá-las, identificando seus valores máximos, que necessariamente ocorrem nas velocidades críticas. As amplitudes laterais de vibração estão diretamente relacionadas com as forças laterais. Neste trabalho a fase não é considerada nas análises;
- **Instabilidade**: Determinadas condições de velocidade e carga podem levar o rotor a amplitudes catastróficas (SALDARRIAGA, 2007, p.5). A ocorrência de forças tangenciais à órbita desestabilizam o rotor. A força é classificada como de amortecimento negativa caso seja proporcional a velocidade instantânea da órbita e como de rigidez de acoplamento caso seja proporcional ao raio instantâneo da órbita (PEREIRA, 2003, pg 18)
- **Velocidade Limite de Estabilidade (VLE)** - Até uma determinada velocidade limite (VLE), o movimento do rotor é estável e síncrono. A partir desta velocidade o movimento do rotor torna-se instável;
- **Precessão**: Para velocidades superiores à VLE, a amplitude de vibração diverge exponencialmente com o tempo. Nesse caso o movimento de precessão tem a mesma direção da rotação do rotor. O

surgimento de instabilidade é muito dependente do estado de equilíbrio das forças sobre o rotor;

2.2 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO

O comportamento viscoelástico dos materiais é caracterizado pela capacidade dos mesmos combinarem respostas dinâmicas típicas dos sólidos elásticos quanto de fluidos viscosos. A resposta elástica é marcada pela recuperação integral e imediata da deformação após cessada a aplicação da carga, ou inversamente, pela relaxação integral e imediata da tensão após cessada a deformação. A resposta viscoelástica é regida pela recuperação não imediata da deformação (ou tensão) ocorrida, um autoajuste do sistema termodinâmico na busca de novos valores de equilíbrio como resultado de uma alteração em alguma variável externa.

Tais fenômenos são essencialmente dependentes da temperatura e da frequência da carga aplicada, dentre outros fatores. O modelo elástico permite descrever adequadamente o comportamento de diversos materiais, em especial os aços, de maior utilização e importância na indústria. Entretanto todos os materiais exibem comportamento viscoelástico, não se observando uma resposta instantânea entre tensão e deformação (SALDARRIAGA, 2007, p.10).

O problema de modelagem da dissipação de energia ainda é implacável para os analistas em dinâmica. De fato, a hipótese elástica é apropriada somente quando o efeito viscoelástico é desprezável. (GRAHAM, 1973, p.1) destaca que um dos problemas básicos reside no fato das equações de movimento na dinâmica estrutural descreverem sistemas macroscópicos enquanto que o efeito viscoso e seus complexos mecanismos ocorrem no nível microscópico, não sendo objetivo deste trabalho explorá-los. O interesse deste trabalho reside apenas na sua consequência, o processo de deformação.

Nesse sentido as teorias fenomenológicas podem fornecer a principal esperança em obter relações adequadas para a dissipação de energia e sua consequente aplicação na dinâmica. Deve-se admitir que as dificuldades não são necessariamente produzidas pela inclusão de modelos de amortecimento nas equações do movimento, mas verdadeiramente no problema fundamental

de determinar esses termos a partir de princípios físicos consistentes. Muito frequentemente os mecanismos causais não são totalmente compreendidos.

Avanços foram realizados no sentido de descrever o processo de deformação a partir de leis fundamentais. Motivado pelos avanços da ciência dos materiais, os modelos ATF e ADF são exemplos onde os métodos da termodinâmica irreversível, partindo do princípio da energia livre de Helmholtz, são usados para desenvolver relações constitutivas que sob o ponto de vista termodinâmico interagem com a evolução do campo de deformações.

Por análise matemática diferencial existem diversos modelos que se propõem a descrever o comportamento dinâmico destes materiais. A escolha basicamente está associada à magnitude da deformação. Pequenas deformações, objeto desse trabalho, sugerem modelos lineares enquanto que grandes deformações sugerem modelos não lineares, de modelagem mais complexa.

2.2.1 Modelos lineares de viscoelasticidade

O mecanismo de deformação viscoelástica linear pode ser modelado partindo do princípio da superposição de Boltzmann. O princípio postula que (VINCENT, 2012, p.11):

- (i) A deformação de um material é função da história do carregamento imposto;
- (ii) Cada incremento de carga produz uma contribuição adicional e independente para a deformação total.

2.2.1.1 O modelo integral

Uma maneira possível de analisar as consequências dos postulados (i) e (ii) é considerar uma barra submetida a um ensaio mecânico, tracionada súbita e longitudinalmente no instante inicial t_1 e mantida sob ação de uma carga constante ao longo do tempo.

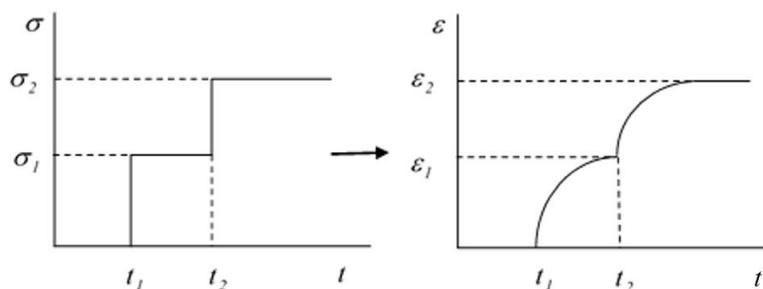
O postulado i) é autoexplicativo. O postulado ii) implica que se no instante atual t_2 , o corpo já inicialmente carregado for novamente submetido a um carregamento adicional idêntico ao imposto em t_1 pelo mesmo período $T = t_2 - t_1$, então também deverá ocorrer uma deformação adicional idêntica, como se o corpo de prova já não estivesse carregado. Resumindo, uma resposta linear da deformação em relação à tensão.

O segundo postulado também implica que quando a carga for removida a recuperação da deformação ocorrerá no mesmo intervalo de tempo T .

O princípio da superposição de Boltzmann não corresponde exatamente à realidade física, mas é um importante ponto de partida para a construção de modelos matemáticos que podem ser testados e refinados (VINCENT, 2012, p.11).

O modelo viscoelástico formulado a partir desse princípio é denominado modelo integral, ilustrado na Fig. 2, representando um corpo de prova tracionado conforme uma carga programada. A figura da direita mostra a deformação resultante da carga aplicada, representada na figura da esquerda.

Figura 2 - Representação do Princípio da superposição de Boltzmann



Seguindo o princípio de Boltzmann, a deformação final do corpo de prova $\varepsilon(t)$ pode ser modelado conforme a Eq. (4), um modelo linear de deformação em relação à tensão aplicada.

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t - \tau_1) + \Delta\sigma_2 J(t - \tau_2) + \dots + \Delta\sigma_n J(t - \tau_n) \quad (4)$$

$J(t - \tau_n)$ é denominado compliança (“*Creep Compliance*”), que introduz de forma explícita o tempo como variável adicional. $\Delta\sigma_i$ são variações de tensões de tração axial decorrentes das cargas adicionais e τ_n seus instantes de aplicação. A Eq.(4) pode ser generalizada na forma da Eq. (5) e na sequência desenvolvida matematicamente até as Eq. (6) e Eq. (7).

A Eq. (6) corresponde à Eq. (5) desenvolvida considerando a descontinuidade da aplicação da carga no instante $t=0$, conseqüentemente envolvendo a função delta (δ) (MAINARDI, 2012, p.293).

Na Eq. (6) surge uma parcela independente e outra dependente do tempo. A primeira corresponde a parcela elástica, com resposta instantânea à tensão no instante da aplicação da carga inicial, e na sequência, a parcela dependente do amortecimento, que ocorre imediatamente após a aplicação da carga. Na Eq. (7). $\frac{d\sigma(t)}{dt}$ introduz as taxas de variação da tensão em relação aos instantes de aplicação dos carregamentos adicionais.

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (5)$$

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma(0) + \int_0^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (6)$$

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma(0) + \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (7)$$

Opcionalmente a Eq. (5) também pode ser integrada por partes obtendo-se a Eq.(8).

$$\varepsilon(t) = J_g \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (8)$$

Pelo mesmo método é possível explicitar $\sigma(t)$ obtendo-se a Eq. (9). \dot{J} e \dot{E} representam a taxa de fluência e a taxa de relaxação do material, respectivamente (MAINARDI, 2012, p.293).

$$\sigma(t) = E_g \varepsilon(t) + \int_0^t \dot{E}(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (9)$$

Nota-se a simetria entre as Eq. (8) e (9). Ambas são integrais de convolução que após algum desenvolvimento obtém-se uma relação de reciprocidade entre J e E no domínio de Laplace, mostrado na Eq.(10) (MAINARDI, 2012, p.293).

$$J(s)E(s) = \frac{I}{s^2} \quad (10)$$

A Eq. (10) transformada para o domínio do tempo resulta na Eq. (11)

$$J(s) * E(s) = \int_0^t J(t-\tau)E(\tau)d\tau = t \quad (11)$$

Assim, às Eq. (8) e (9) expressam J e E como funções de material descrevendo as respostas de um sólido a excitações do tipo degrau unitário:

- i) E , (Módulo), como a resposta de tensão à uma deformação;
- ii) J , (Compliance), como a resposta da deformação à uma tensão;

Na Eq. (8) $J(t-\tau)$ e $E(\tau)$ guardam uma relação inversa. Seus termos dependentes e independentes do tempo, mostrados na Eq.(12), necessariamente são maiores ou iguais a zero. Os valores limite dessas funções quando $t \rightarrow 0^-$, e quando $t \rightarrow +\infty$ representam respectivamente as parcelas independentes do tempo, (com sub índices “g”), e dependentes do tempo, (com sub índice “e”), ambas mostradas na Eq. (12), onde as relações entre J_g, J_e e E_g, E_e são obtidas a partir da Eq. (10).

$$E_e = \frac{I}{J_e}, E_g = \frac{I}{J_g} \quad (12)$$

Com a combinação dos possíveis valores de J_g, J_e, E_g e E_e convencionando-se que 0 e $+\infty$ são recíprocos, resume-se na Tab. 1 os tipos

de viscoelasticidade possíveis de acordo com suas respostas instantâneas (“ g ”) e de equilíbrio (“ e ”) (MAINARDI, 2012, p.294).

Tabela 1 : Tipos de viscoelasticidade em função da taxa de fluência e do módulo do material

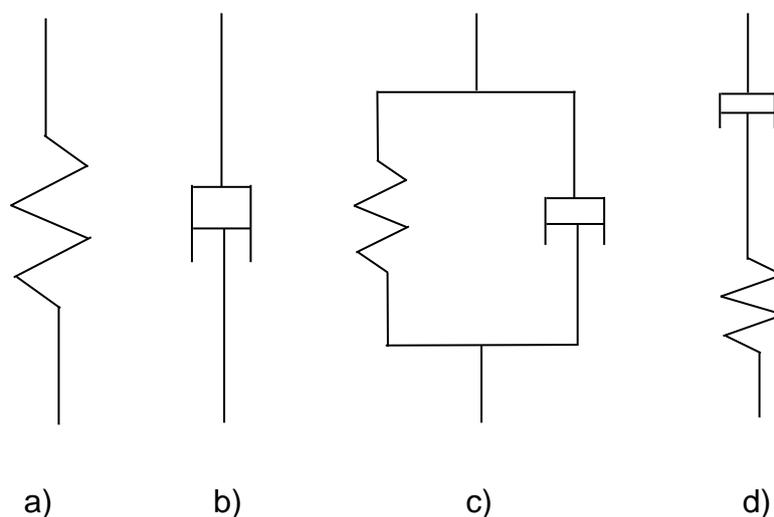
Tipo	J_g	J_e	E_g	E_e
I	> 0	$< \infty$	$< \infty$	> 0
II	> 0	$= \infty$	$< \infty$	$= 0$
III	$= 0$	$< \infty$	$= \infty$	> 0
IV	$= 0$	$= \infty$	$= \infty$	$= 0$

Fonte : MAINARDI, 2012, p.294

2.2.1.2 O modelo diferencial

A viscoelasticidade linear, por analogia ao comportamento dos osciladores mecânicos clássicos, também pode ser descrita a partir da combinação de molas e amortecedores em série ou paralelo (MAINARDI, 2012, p.295). Os quatro modelos fundamentais são mostrados na Fig. 3

Figura 3: Modelos fundamentais de osciladores - a) Hooke, b) Newton, c) Voigt, d) Maxwell



Fonte : Adaptado de MAINARDI, 2012, p.295)

(MAINARDI, 2012, p.296) explicita as regras de combinação de molas e amortecedores mostrando que são imediatas as relações entre as funções de fluência (J) e os módulos dos materiais (E) quando da combinação em série ou

em paralelo dos modelos fundamentais. Funções de fluência são aditivas quando os modelos são combinados em série, enquanto que os módulos são aditivos quando em paralelo.

Uma vez que a teoria da viscoelasticidade linear também é estabelecida a partir dos mesmos princípios, a analogia com a combinação convencional de molas e amortecedores é útil para visualizar as propriedades e leis resultantes da combinação de elementos “ J ” e “ E ”.

Os modelos a seguir estão submetidos a aplicações de tensões ou deformações unitárias súbitas (função degrau), conforme MAINARDI (2012, pg. 295).

- a) O modelo de Hooke é um caso limite de viscoelasticidade, representando o tipo I, Eq. (13), um sólido elástico ideal. Quando submetido a uma deformação unitária súbita haverá condição de equilíbrio instantânea entre tensão e deformação. E_e e E_g assumem valores reais e iguais.

$$\sigma(t) = k\varepsilon(t) \quad J(t) = \frac{1}{k} \quad E(t) = k \quad (13)$$

- b) O modelo de Newton representa o tipo IV, Eq.(14), um fluido ideal, um outro caso limite de viscoelasticidade. Na Eq. (14) $E(t)$ associa-se à função delta $\delta(t)$. E_e será igual a zero uma vez que uma deformação unitária súbita nunca levará a uma condição de equilíbrio entre tensão e deformação. No instante inicial haverá um aumento indefinido da tensão. E_g tenderá ao infinito no instante de aplicação da carga.

$$\sigma(t) = \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad J(t) = \frac{t}{\mu} \quad E(t) = \mu\delta(t) \quad (14)$$

- c) O modelo de Voigt representa o tipo III, Eq.(15), um modelo viscoelástico básico. Quando submetido a uma tensão súbita, com o decorrer do tempo, a deformação tenderá a um limite que a partir do qual não ocorrerá relaxação adicional. A deformação é completamente reversível (embora

não instantânea) quando cessada a carga. As Eq. (15) exibem a relação exponencial entre J e t .

$$\sigma(t) = k\varepsilon(t) + \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad J(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{\mu}} \right) \quad E(t) = k + \mu\delta(t) \quad (15)$$

- d) O modelo de Maxwell representa o tipo II, Eq.(16), outro modelo viscoelástico básico. Quando submetido a uma tensão súbita o amortecedor em série com a mola não limita a deformação, sempre permitindo relaxação adicional.. Na Eq. (16) J e t são diretamente proporcionais.

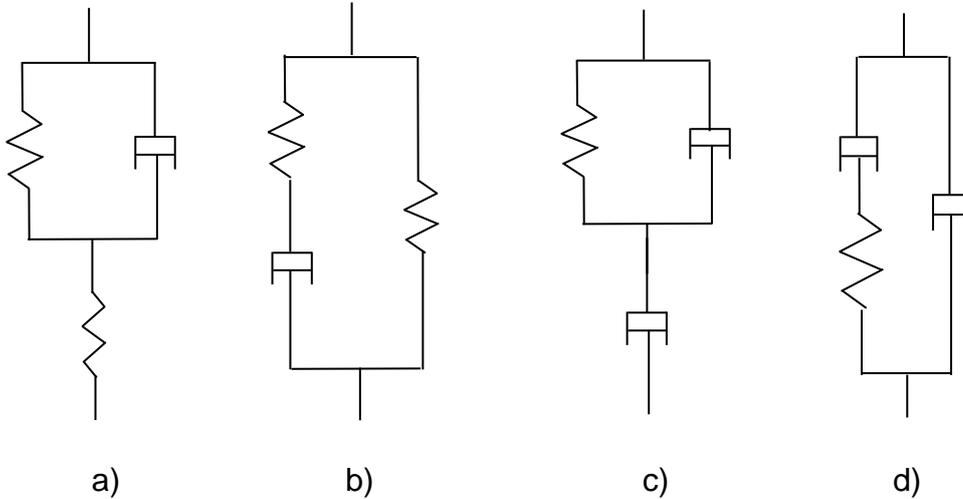
$$\sigma(t) + a \frac{d\sigma}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad J(t) = \frac{a}{\mu} + \frac{t}{\mu} \quad E(t) = \left(\frac{\mu}{a} \right) e^{-\frac{t}{a}} \quad (16)$$

Para quaisquer dos quatro modelos apresentados, as funções $J(t)$ e $E(t)$ assumem as formas genéricas mostradas nas Eq. (17) (MAINARDI, 2012, p.297):

$$\begin{cases} J(t) = J_g + X_+ \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) + J_+ t \\ E(t) = E_e + X_- e^{-\frac{t}{\tau_c}} + E_- \delta(t) \end{cases} \quad (17)$$

Conforme já mencionado, funções de fluência são aditivas quando os modelos são combinados em série, enquanto que os módulos são aditivos quando em paralelo (MAINARDI, 2012, p.295). Por exemplo, o modelo de Zener é obtido adicionando uma mola em série com o modelo de Voigt (ZENER, 1948) *apud* (MAINARDI, 2012, p.296), conforme a Fig. 4a.

Figura 4 - a) Mola em série com Voigt; b) Mola em paralelo com Maxwell; c) Amortecedor em série com Voigt; d) Amortecedor em paralelo com Maxwell



Fonte : Adaptado de MAINARDI, 2012, p.296

Seguindo o exemplo, de acordo com a regra de combinação, adicionando-se a constante positiva J_g à função de fluência do modelo de Voigt, obtém-se a Eq.(18). A Eq. (19) é obtida como consequência da reciprocidade no domínio de Laplace, Eq. (10) (MAINARDI, 2012, p.296).

$$J(t) = J_g + X_+ \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}} \right) \quad (18)$$

$$E(t) = E_e + X_- e^{-\frac{t}{\tau_e}} \quad (19)$$

O modelo da Fig. 4a na forma diferencial é mostrado na Eq. (20). A relação entre as constantes das Eq.(18), (19) e (20) são mostradas nas Eq. (21) (MAINARDI, 2012, p.297). As constantes guardam as seguintes relações:

- i) $0 < k < \frac{\mu}{a}$ assegura que X_+ e X_- sejam positivos;
- ii) $0 < J_g < J_e < \infty$, $0 < E_e < E_g < \infty$ e $0 < \tau_g < \tau_e < \infty$ resultam um corpo viscoelástico do tipo I.

O operador diferencial entre colchetes na Eq.(20), relaciona tensão e deformação.

$$\left[1 + a \frac{d}{dt} \right] \sigma(t) = \left[k + \mu \frac{d}{dt} \right] \varepsilon(t) \quad (20)$$

$$\begin{array}{lll} J_g = \frac{a}{\mu} & X_+ = \frac{1}{k} - \frac{a}{\mu} & \tau_\varepsilon = \frac{\mu}{k} \\ E_e = k & X_- = \frac{\mu}{a} - k & \tau_\varepsilon = a \end{array} \quad (21)$$

O modelo da Fig. 4b pode ser obtido sob a mesma analogia, resultando um corpo viscoelástico do tipo I, enquanto os das Fig. 4c e 4d constituirão corpos viscoelásticos do tipo IV (MAINARDI, 2012, p.297).

Ainda baseando-se nas regras de combinação, partindo-se da Eq.(17), é possível introduzir generalizações obtendo-se modelos mais complexos, com J e E relacionados no domínio de Laplace conforme mostrado na Eq.(22). Os modelos baseados a partir dessas combinações são denominados modelos reológicos (BLANTER, 2007, pg 2)

$$\begin{cases} J(t) = J_g + \sum_{n=1}^N J_n \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} \right) + J_+ t \\ E(t) = E_e + \sum_{n=1}^N E_n e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}} + E_- \delta(t) \end{cases} \quad (22)$$

A partir das relações de reciprocidade entre J e E no domínio de Laplace os modelos da Fig. 4 também podem ser transformados para o domínio do tempo na forma diferencial conforme a Eq.(23), utilizando o operador $\frac{d^k}{dt}$ para obtenção de equações constitutivas generalizadas (MAINARDI, 2012, p.297).

O operador $E()$ pode ser representado no domínio do tempo ou Laplace conforme Eq. (24) e (25)

$$\left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \sigma(t) = \left[\sum_{k=0}^q n_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \varepsilon(t) \quad , p = q \quad p = q + 1 \quad (23)$$

$$\sigma(t) = \frac{\left[\sum_{k=0}^p n_k \frac{d^k}{dt^k} \right]}{\left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right]} \varepsilon(t) = \frac{Num(\cdot)}{Den(\cdot)} \varepsilon(t) = E(\cdot) \varepsilon(t) \quad (24)$$

$$E(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} \quad (25)$$

Para refletir com aproximação suficiente as reais propriedades viscoelásticas é necessário combinar múltiplos elementos de mola e amortecedores. Tais modelos reológicos são conhecidos na literatura como Modelos Padrões Generalizados, Eq.(23), podendo incluir k derivadas de ordem superior a fim de obter-se a aproximação desejada para uma representação mais adequada ao comportamento viscoelástico real.

2.3 COMPORTAMENTO HISTERÉTICO E MEDIDAS DE AMORTECIMENTO

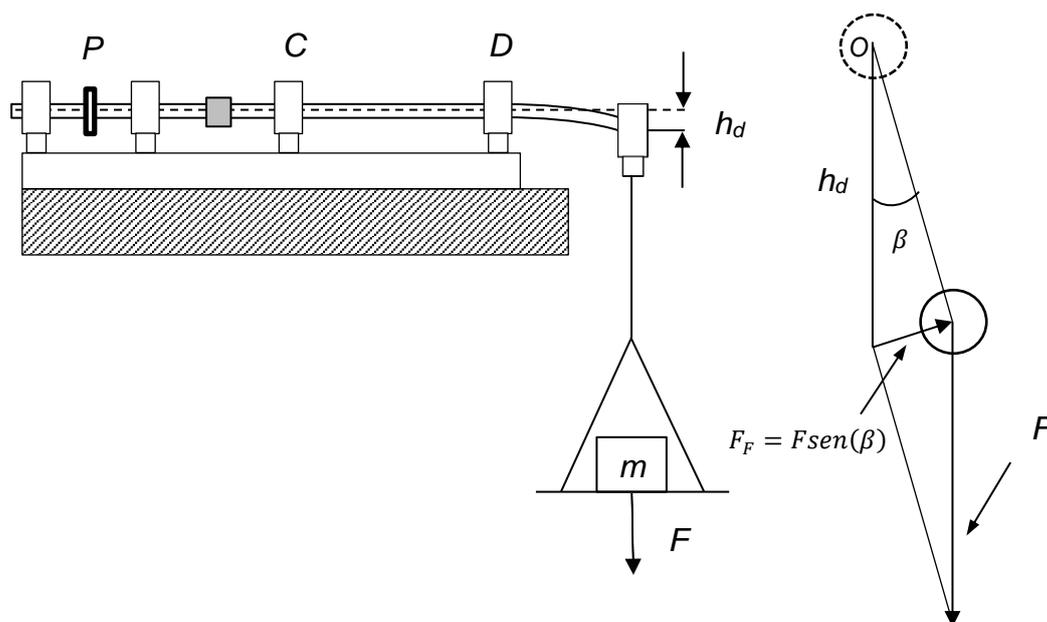
A pesquisa sobre o efeito do amortecimento em rotores não iniciou recentemente. Os primeiros pesquisadores que identificaram o amortecimento histerético interno dos materiais em rotores foram NEWKIRK e KIMBALL (1924) *apud* CERMINARO (1999, p. 24), conduzindo testes em rotores com diferentes materiais numa faixa de frequências entre 0,03 a 50 Hz.

Estes pesquisadores utilizaram o aparato mostrado na Fig. 5, um eixo apoiado sobre mancais em C e D , suportando uma carga F conhecida suspensa por um mancal na extremidade O , conectado e acionado por uma polia em P .

A carga produz uma deflexão h_D em relação a linha de centro não deformada do eixo, além de uma pequena deflexão angular β quando observado frontalmente. NEWKIRK e KIMBALL concluíram que uma força radial

de magnitude $F_F = F \text{sen}(\beta)$, associada ao amortecimento interno do material, produz a deflexão angular.

Figura 5 - Aparato experimental utilizado por Kimball/Newkirk



Fonte : Adaptado de KIMBALL (1932, pg 130)

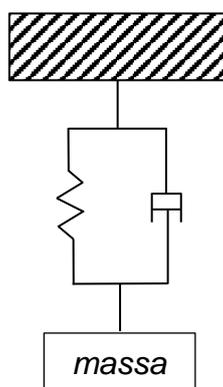
Ainda no referido experimento, com a medição do ângulo β foi possível calcular o trabalho necessário para superar o amortecimento interno. Além, foi observado que o sentido da força de amortecimento era defasado de 180 graus do sentido da velocidade de rotação, porém proporcional à deformação. Desde esses testes iniciais, muitas evidências experimentais confirmaram que em certos materiais o amortecimento interno é independente da frequência de excitação (KIMBALL, 1932) *apud* (CERMINARO, 1999, p. 2-11).

A resposta dinâmica de uma estrutura é essencialmente determinada por suas propriedades de massa e rigidez, (associadas à conservação da energia), e pelo amortecimento, responsável pela dissipação. Uma distinção importante existe entre o amortecimento como uma medida global de uma estrutura mecânica, como por exemplo a histerese decorrente do atrito entre componentes, e o amortecimento decorrente das propriedades dos materiais quando sujeitos a cargas cíclicas. Diferentemente da massa e da rigidez, o

amortecimento interno não pode ser inferido a partir de simples medições estáticas (CARFAGNI, 1998, pg. 1). Sua determinação é realizada indiretamente e envolve aproximações.

Existem diversas medidas que caracterizam as capacidades de amortecimento interno de um material anelástico, surgidas através da analogia a uma sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade, Fig. 6, mostradas na sequência.

Figura 6: Vibração livre amortecida – Sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade



2.3.1 Dissipação por ciclo

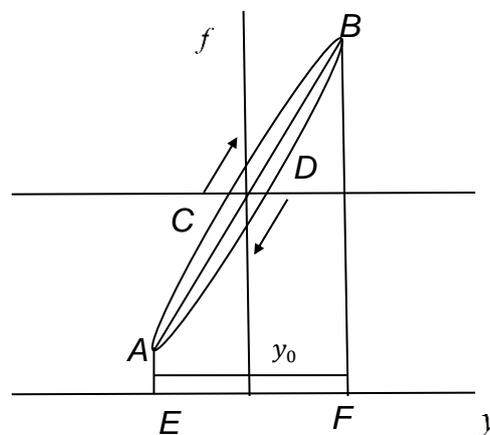
KIMBALL, (1932, pg 112) descreve o processo de dissipação de energia por ciclo no movimento harmônico com amortecimento viscoso. Os segmentos *AB* e *BA* da Fig. 7 são as curvas força-deformação das duas fases do movimento harmônico relativo à Fig. 6 porém na versão não amortecida. A amplitude da deformação na direção y é representada pelo segmento *EF*. A área abaixo do segmento *AB* é a mesma que a área sob *BA*, significando que durante as duas fases do ciclo as mesmas quantidades de energia são empregadas e, portanto, não há dissipação de energia.

À medida que o amortecimento é introduzido, os mecanismos de fornecimento e dissipação de energia são alterados e por consequência da segunda lei da termodinâmica a energia empregada no carregamento será sempre maior que a empregada na relaxação, assim as retas *AB* e *BA* são “distorcidas”.

A energia fornecida, antes representada pela área sob a reta AB , será então representada pela área $EACBF$ enquanto que a energia dissipada, antes representada pela área sob a reta AB , terá o valor da área $EADB$. Necessariamente a diferença entre as duas áreas, Eq.(26), representa a energia dissipada por ciclo de movimento.

$$A = \oint f dy = \pi y_0^2 \mu \varphi \quad (26)$$

Figura 7 - Curva força-deslocamento para o movimento harmônico amortecido



Fonte : Adaptado de KIMBALL (1932, pg. 112)

2.3.2 Fator de perda

Uma medida importante do amortecimento interno dos materiais é o fator de perda. Em procedimentos experimentais como por exemplo a norma ISO 6721-1, o fator de perda é especificado como a razão entre a parte imaginária e a parte real do módulo complexo $E(s)$, Eq.(25).

Porém, outra definição a partir da parcela de energia dissipada pode ser mais adequada sob o ponto de vista conceitual. A respeito das oscilações harmônicas o fator de perda é definido conforme Eq. (27). ΔW é a quantidade de energia dissipada e W o trabalho realizado, ambos por ciclo do movimento. Se supormos que a energia é dissipada uniformemente ao longo do movimento, a quantidade $\Delta W / (2\pi)$ representará a energia dissipada por radianos. O fator de perda multiplicado por 2π fornece o percentual da quantidade de energia

dissipada por ciclo do movimento. A Eq. (27) fornece as relações entre energia dissipada, fator de perda e trabalho realizado.

$$\eta = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (27)$$

LAZAN (1968) destaca-se na compilação de dados sobre as propriedades de amortecimento de diversos materiais. Após muitos anos de sua publicação, contendo uma compilação das propriedades dinâmicas de diversos materiais, seu trabalho ainda é uma referência importante para engenheiros, projetistas e pesquisadores.

2.3.3 Decremento logarítmico

O decremento logarítmico, que representa a redução da amplitude do movimento à cada ciclo pode ser representado de forma aproximada por duas formas distintas conforme a Eq.(28), aplicada à Fig. 7. São aproximações suficientes para as aplicações práticas. A última expressão é extremamente útil uma vez que se a energia dissipada puder ser estimada o decremento logarítmico e o fator de perda podem ser obtidos diretamente e vice-versa (KIMBAL, 1932, pg.116).

$$\delta = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta W}{2W} \quad (28)$$

3 MÉTODO

Nesta seção são desenvolvidos os modelos dinâmicos dos rotores. Na seção 3.1 são deduzidas as equações constitutivas do modelo ADF para um e dois campos sem restrição relativa ao modo de deformação axial do eixo. Na seção 3.2 são idênticamente deduzidas para um e dois campos ADF casos particulares de equações onde restrições na deformação axial do eixo são impostas.

3.1 MODELO ADF

LESIEUTRE *et. al.* (1996) *apud* LIMA (2016, p.334) propuseram o método ADF. A estratégia consiste em representar os efeitos da dissipação através de campos anelásticos formulados diretamente no domínio do tempo. O campo de deformação anelástico é denominado ADF, não instantaneamente proporcional à tensão aplicada e introduzido com o objetivo de levar em conta o processo de relaxação.

Diferentemente da ideia de obter equações constitutivas somente a partir da combinação aleatória de elementos de molas e amortecedores, na formulação ADF a evolução das deformações e tensões partem do princípio da energia livre de Helmholtz, conferindo-lhe motivação física. O deslocamento total e o anelástico formam um par de equações diferenciais acopladas, porém não dependentes do tempo explicitamente. O modelo também admite múltiplos campos ADF.

As equações diferenciais do campo anelástico são obtidas no domínio de Laplace, que uma vez combinadas e invertidas para o domínio do tempo, obtém-se a equação diferencial do campo de tensões uniaxiais. ROY (2009, pg.393) resume a formulação das equações do modelo ADF, aqui utilizado como referencial.

A tensão uniaxial na Eq. (30) é obtida da Eq.(29). H é a densidade de energia livre de Helmholtz, N é o número total de campos anelásticos e i é o i -ésimo campo anelástico. O modelo pressupõe que a taxa de deformação do campo ADF é proporcional à variação em relação ao seu valor de equilíbrio, Eq.(34).

A energia livre de Helmholtz (energia interna diminuída do produto entre a entropia e a temperatura do sistema) representa a energia que é transferida de forma espontânea e irreversível do sistema para um reservatório térmico à temperatura constante (o meio ambiente) (TERMODINÂMICAUFF, 2015). Um processo em condições isotérmicas e variação de volume nula ou desprezável ocorrendo de forma espontânea, é à custa de sua energia livre, com o trabalho realizado por seus próprios recursos e parte da energia térmica fornecida a partir

do seu entorno, com um aumento na entropia do sistema SPANNER (1964) *apud* HANSEN (1990, pg. 16).

Nas Eq. (30) e (31) E é o módulo de elasticidade, σ é a tensão uniaxial, σ^A é a tensão uniaxial anelástica, ε é a deformação total, ε^A é a deformação anelástica, E^A é o módulo anelástico do material e c uma constante. A taxa de variação de cada campo anelástico é proporcional à variação do próprio campo em relação ao seu valor de equilíbrio $\bar{\varepsilon}_i^A$.

Os valores de equilíbrio para cada campo anelástico ($\bar{\varepsilon}_i^A$) são obtidos impondo $\sigma_i^A = 0$ na Eq.(31), resultando na Eq.(32).

Tomando b_i como o inverso do tempo de relaxação de cada campo anelástico à tensão constante e S uma constante de proporcionalidade obtém-se as Eq. (34) e (35). D é o operador diferencial $\frac{d}{dt}$. Ponto(s) localizado(s) em cima da variável representa(m) derivada(s) em relação ao tempo.

$$H = \frac{I}{2} \left(E\varepsilon^2 - \sum_{i=1}^N \left(2E\varepsilon\varepsilon_i^A - E_i^A (\varepsilon_i^A)^2 \right) \right) \quad (29)$$

$$\sigma = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = E \left(\varepsilon - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^A \right) \quad (30)$$

$$\sigma_i^A = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_i^A} = E (\varepsilon - c_i \varepsilon_i^A) \quad (31)$$

$$\bar{\varepsilon}_i^A = \frac{1}{c_i} \varepsilon \quad (32)$$

$$c_i = \frac{E_i^A}{E} \quad (33)$$

$$\dot{\varepsilon}_i^A = S\sigma_i^A = -b_i \left(\varepsilon_i^A - \bar{\varepsilon}_i^A \right) = -b_i \left(\varepsilon_i^A - \frac{I}{c_i} \varepsilon \right) \quad (34)$$

$$\varepsilon_i^A = \frac{b_i}{c_i} \frac{I}{[D + b_i]} \varepsilon \quad (35)$$

A equação constitutiva é obtida substituindo a Eq. (35) na Eq. (30), resultando na Eq. (36).

O módulo de elasticidade $E(\)$ associado à Eq. (36) transforma-se na Eq. (37) no domínio de Laplace, e na forma complexa na Eq.(38), com $s = i\varphi$, onde φ é a frequência de excitação.

$$\sigma = E \left[I - \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{c_i} \frac{I}{[D + b_i]} \right] \varepsilon = E(\) \varepsilon \quad (36)$$

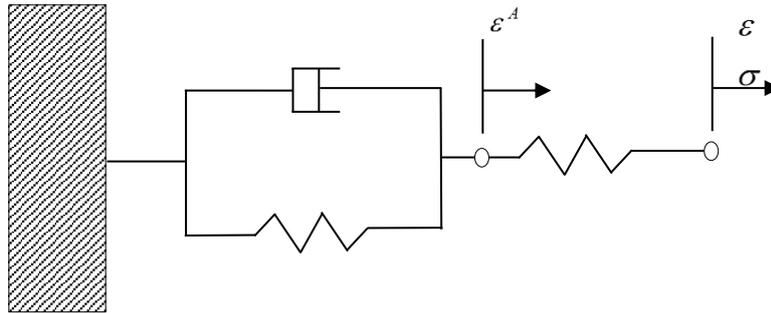
$$E(s) = E \left[I - \sum_{i=1}^N \frac{I}{c_i} \frac{I}{\left[\frac{s}{b_i} + I \right]} \right] \quad (37)$$

$$E(w) = E \left(I - \sum_{i=1}^N \frac{I}{c_i} \frac{I}{I + \left(\frac{\varphi}{b_i} \right)^2} \right) + iE \left(\sum_{i=1}^N \frac{I}{c_i} \frac{\left(\frac{\varphi}{b_i} \right)}{I + \left(\frac{\varphi}{b_i} \right)^2} \right) \quad (38)$$

Os parâmetros c_i e b_i das equações são obtidos pelo ajuste de resultados de experimentos. Da Eq. (38), o módulo de elasticidade (parte real e parte complexa) dos materiais são dependentes das frequências de excitação, e os ensaios para obtenção dos parâmetros podem ser realizados em frequências diferentes para obtenção do ajuste adequado nas equações (ROY, 2016, pg 94).

Considerando apenas um campo de deslocamento anelástico, a equação constitutiva do modelo pode ser representada pelo sistema mostrado na Fig. 4a ou de forma mais detalhada na Fig. 8. A tensão σ é determinada pela rigidez da mola em série com o sistema mola-amortecedor e pela deformação elástica dada pela diferença entre a deformação total ε e a deformação anelástica interna ε^A . A tensão no amortecedor é também diretamente proporcional à taxa de deformação anelástica (SALDARRIAGA, 2007, pg 29).

Figura 8 - Representação do modelo ADF com 1 campo anelástico



Fonte: Adaptado de SALDARRIAGA (2007, p. 45)

O fator de perda é a razão entre a parte complexa e a parte real do módulo de elasticidade, representando a tangente do ângulo entre os fasores de tensão e a deformação.

Para o caso de um e dois campos anelásticos a Eq. (36) resulta nas Eq. (39) e (40), respectivamente, idênticas à Eq.(23), com $p = q$

$$\begin{cases} m_0\sigma + m_1\dot{\sigma} = n_0\varepsilon + n_1\dot{\varepsilon} \\ m_0 = 1; m_1 = \frac{1}{b}; n_0 = E\left(1 - \frac{1}{c}\right); n_1 = \frac{E}{b} \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \sigma + m_1\dot{\sigma} + m_2\ddot{\sigma} = n_0\varepsilon + n_1\dot{\varepsilon} + n_2\ddot{\varepsilon} \\ m_0 = 1; m_1 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}; m_2 = \frac{1}{b_1b_2}; n_0 = E\left(1 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\right); \\ n_1 = E\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \left(\frac{1}{b_1c_2} + \frac{1}{b_2c_1}\right)\right); n_2 = E\left(\frac{1}{b_1b_2}\right) \end{cases} \quad (40)$$

3.1.1 Modelo ADF – Caso particular

O objetivo desta seção é, a partir do modelo ADF, obter relações entre tensão e deformação axial de um rotor com velocidades de rotação e precessão uniformes.

A Fig. 9 representa a seção transversal de um eixo com raio r_0 em movimento de rotação em torno do seu centro com velocidade angular Ω

constante e movimento de precessão imposto de frequência ω , em torno da linha de centro não deformada do eixo, num instante qualquer.

São mostrados na mesma figura os sistemas de coordenadas XOY , fixo, cuja origem situa-se na mesma linha de centro e um segundo sistema zoy , (móvel) cuja origem situa-se no centro da seção do eixo, girando solidariamente.

z representa a linha neutra em relação à flexão, dividindo a seção transversal do eixo em duas semi-circunferências.

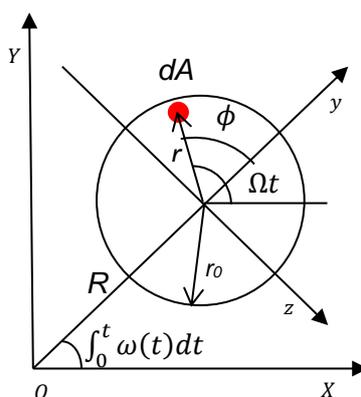
Modelando como uma viga de Euler-Bernoulli, a flexão atuante na seção provoca deformações distendendo-a axialmente na região da semicircunferência situada na parte positiva do eixo y enquanto que a outra metade é comprimida. Num instante t , ε é a deformação axial sofrida pelo elemento dA , distante de r em relação ao centro da seção.

Combinada com a Eq. (32) e considerando que a taxa de deformação do campo ADF é nula no instante $t=0$, a Eq. (34) pode ser reescrita no domínio de Laplace, Eq. (41)

$$\varepsilon_i^A(s) = \left(\frac{b_i}{c_i} \right) \frac{I}{b_i + s} \varepsilon(s) \quad (41)$$

A Eq. (42) relaciona ε com a velocidade de precessão $\omega(t)$. ε_0 e r_0 são a deformação na superfície do eixo e o raio da seção respectivamente.

Figura 9 - Seção transversal do eixo



Fonte: Adaptado de (EHRICH, 1964 apud CERMINARO, 1999, p. 3-6)

$$\varepsilon = \left(\frac{r}{r_0} \right) \varepsilon_0 \cos(\phi) \quad (42)$$

$$\phi = \int_0^t (\Omega - \omega(t)) dt \quad \dot{\phi} = \Omega - \omega(t) \quad (43)$$

Portanto, considerando ω e Ω constantes, a frequência de excitação $\dot{\phi}$ resulta na Eq. (44)

$$\varphi = \dot{\phi} = \Omega - \omega \quad (44)$$

Em regime de estabilidade a deformação na superfície (ε_0) depende apenas do grau de flexão do eixo, e portanto, permanece em estado estacionário durante o movimento de rotação.

Convém neste ponto destacar que se a rotação do eixo for nula e o mesmo for submetido à flexão unidirecional harmônica, a expressão da deformação axial ε possuirá a mesma forma da Eq.(42), e nesse caso a deformação máxima na superfície será igual a ε_0 .

Aplicando a transformada de Laplace na Eq.(42), com taxa de deformação nula quando $t=0$, obtém-se

$$\varepsilon(s) = \varepsilon_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{s}{s^2 + \dot{\phi}^2} \quad (45)$$

Transformando a Eq. (30) para o domínio de Laplace e introduzindo as Eq.(41) e (36) obtém-se a Eq.(46).

$$\sigma(s) = E \left[\varepsilon_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \frac{s}{s^2 + \dot{\phi}^2} \left(I - \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{c_j} \left(\frac{I}{b_j + s} \right) \right) \right] \quad (46)$$

Aplicando as transformadas inversas de Laplace à Eq. (46) obtém-se a Eq. (47) e (48), as tensões no domínio do tempo para o caso particular do eixo com rotação e precessão uniformes para um e dois campos anelásticos, respectivamente.

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \left(\frac{1}{b^2 + \dot{\phi}^2} \right) \left(\frac{1}{c} \right) (b^2(c-1) + c\dot{\phi}^2) \cos(\dot{\phi}t) - b\omega \sin(\dot{\phi}t) + b^2 e^{-bt} \quad (47)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} b_1^2 b_2^2 (c_1 c_2 - c_1 - c_2) \cos(\dot{\phi}t) - \\ b_1 b_2 (b_1 c_1 - b_2 c_2) \dot{\phi} \sin(\dot{\phi}t) + \\ (b_1^2 c_2 (c_1 - 1) + b_2^2 c_1 (c_2 - 1)) \dot{\phi}^2 \cos(\dot{\phi}t) - \\ (b_1 c_2 + b_2 c_1) \dot{\phi}^3 \sin(\dot{\phi}t) + \\ (c_1 c_2) \dot{\phi}^4 \cos(\dot{\phi}t) \end{array} \right] + \\ \left[\begin{array}{l} \left(\frac{b_1^2}{c_1 (b_1^2 + \dot{\phi}^2)} \right) e^{-b_1 t} + \left(\frac{b_2^2}{c_2 (b_2^2 + \dot{\phi}^2)} \right) e^{-b_2 t} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (48)$$

As componentes exponenciais das Eq. (47) e (48) convergem para zero. No limite, as duas equações serão reduzidas à Eq. (49), o campo de tensões em um eixo com frequência de rotação Ω e precessão ω

$$\sigma(t) = \left[\sum_{k=0}^q n_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \varepsilon(t) \quad (49)$$

Se Ω for igual a ω então os coeficientes n_k de ordem igual ou superior a um são anulados devido a sincronicidade entre a precessão e a rotação. Nesse caso a tensão uniaxial será diretamente proporcional à deformação.

Para velocidades de precessão e rotação uniformes e quaisquer, os coeficientes n_k da Eq. (49) serão conforme os grupos das Eq. (50) e (51).

Para 1 campo anelástico a equação constitutiva será de 2ª ordem, com coeficientes conforme Eq.(50), com $q = 1$.

$$n_0 = E \left[\Psi(b^2) \left[\left(1 - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{\dot{\phi}}{b} \right)^2 \right] \right]; \quad n_1 = E \left[\Psi(b) \left(\frac{1}{c} \right) \right]; \quad \Psi = \frac{1}{b^2 + \dot{\phi}^2} \quad (50)$$

Para 2 campos anelásticos, Eq.(51). A equação constitutiva será de 4ª ordem, com $q = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 = E \left[\Psi_1 \Psi_2 (b_1^2 b_2^2) \left(1 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right) \right]; \quad n_1 = E \left[\Psi_1 \Psi_2 (b_1 b_2) \left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{c_2} \right) \right] \\ n_2 = E \left[\Psi_1 \Psi_2 \left(b_1^2 \left(1 - \frac{1}{c_1} \right) + b_2^2 \left(1 - \frac{1}{c_2} \right) \right) \right]; \quad n_3 = E \left[\Psi_1 \Psi_2 \left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{c_2} \right) \right] \\ n_4 = E[\Psi_1 \Psi_2]; \quad \Psi_i = \frac{1}{b_i^2 + \dot{\phi}^2} \end{array} \right. \quad (51)$$

Ou opcionalmente, utilizando as relações entre as derivadas das funções seno e cosseno, os coeficientes serão conforme Eq. (52), com equação constitutiva de 2ª ordem, com $q = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 = E \Psi_1 \Psi_2 \left\{ \left[\left(b_1^2 b_2^2 \right) \left(1 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \right) \right] + \left[\left(b_1^2 \left(1 - \frac{1}{c_1} \right) + b_2^2 \left(1 - \frac{1}{c_2} \right) \right) \right] \dot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4 \right\} \\ n_1 = E \Psi_1 \Psi_2 \left\{ \left[\left(b_1 b_2 \right) \left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{c_2} \right) \right] + \dot{\phi}^3 \right\} \end{array} \right. \quad (52)$$

3.1.2 Modelo Histerético

Os coeficientes das equações constitutivas do modelo histerético são tomados da Eq. (53), conforme ZORZI, (1977) *apud* CERMINARO, (1999, p.2-13). η_H é o fator de perda, φ é a frequência de excitação e E o módulo de elasticidade do material.

$$\sigma = E \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} \varepsilon + \frac{\eta_H}{\varphi \sqrt{1 + \eta_H^2}} \dot{\varepsilon} \right) \quad (53)$$

Com coeficientes de acordo com as Eq. (54).

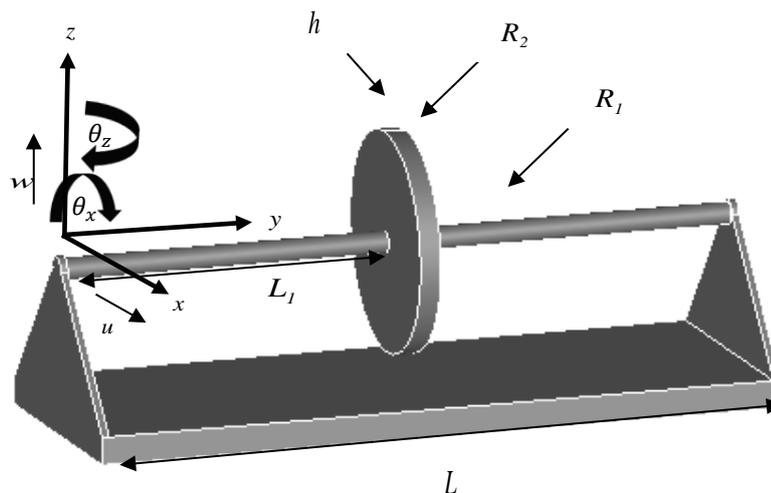
$$m_0 = 1; \quad n_0 = E \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} \right); \quad n_1 = E \left(\frac{\eta_H}{\varphi \sqrt{1 + \eta_H^2}} \right) \quad (54)$$

3.2 MODELAGEM DO ROTOR

O modelo disco/eixo considerado na Fig.(10), com geometria similar ao utilizado em LALANNE (1998, pg. 12) e ROY (2016, pg. 11), consiste de um eixo esbelto de comprimento L e raio R_1 , bi-apoiado sobre mancais rígidos e isotrópicos, equipado com um disco rígido posicionado a uma distância de L_1 da extremidade do eixo. Uma massa de desbalanceamento m localiza-se no raio externo do disco de espessura h . O conjunto possui velocidade de rotação Ω .

As equações do movimento são obtidas a partir das equações de Lagrange.

Figura 10 - Modelo geométrico de rotor



3.2.1 Energia cinética

A energia cinética do disco (T_D), do eixo (T_S), da massa de desbalanceamento (T_u) e a total (T_R) são dadas nas Eq.(55), (56), (57) e (58) respectivamente.

T_D e T_R são compostas da soma das três contribuições decorrentes :

- Dos movimentos translacionais;

- Dos movimentos rotacionais em torno dos eixos x e z ;
- Dos movimentos rotacionais em torno do eixo y ;

A parcela T_u decorre do movimento rotativo da massa de desbalanceamento em torno da linha de centro do eixo.

$$T_d = \frac{M_d}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{I_{dx}}{2} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + I_{dy} \Omega \dot{\theta} \quad (55)$$

$$T_s = \int_0^L \frac{\rho A}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \int_0^L \frac{\rho I}{2} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) dy + \int_0^L 2 \rho I \Omega \dot{\theta}_z \theta_x dy \quad (56)$$

$$T_u = m_u \Omega d_1 (\dot{u} \cos(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t)) \quad (57)$$

$$T_R = T_d + T_s + T_u \quad (58)$$

3.2.2 Energia de deformação e forças generalizadas

A expressão da energia de deformação dependerá do número de campos ADF. A Eq.(24) é a equação constitutiva em sua forma geral.

O potencial generalizado é obtido aplicando-se o operador diferencial $E()$ na expressão de energia de deformação de um modelo de viga de Euler-Bernoulli sob flexão simples. O efeito do cisalhamento não é considerado.

A densidade de energia de deformação u_T e a energia de deformação U_T são dadas pelas Eq. (59). O operador $E()$ é composto pelos operadores $Num()$ e $Den()$. Na Eq. (61) os termos entre colchetes são respectivamente os operadores $Den()$ e $Num()$, "denominador" e "numerador" do operador diferencial linear $E()$, (ROY, 2010, pg 5 e 6), Eq.(36).

$Num()$ atua no lado direito da Eq. (60), sobre o integrando (deformação ε).

Na Eq. (61) $Den()$ atua no primeiro termo, sobre a energia potencial total U_T . No segundo termo da mesma equação a energia potencial total é obtida integrando a densidade de energia por todo o volume do eixo.

$$u_T = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad e \quad U_T = \int_V u_T dV \quad (59)$$

$$[Den(\cdot)]u_T = \int_0^\varepsilon [Num(\cdot)](\varepsilon)d\varepsilon \quad (60)$$

$$\left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] U_T = \left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \int_V u_T dV = \int_V \left(\int_0^\varepsilon \left[\sum_{k=0}^p n_k \frac{d^k}{dt^k} \right] (\varepsilon) d\varepsilon \right) dV \quad (61)$$

Desenvolvendo a Eq. (61) para os casos de $p=1$ e $p=2$ respectivamente teremos as Eq. (62) e (63)

$$\left[\sum_{k=0}^1 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] U_T = I \left[\begin{array}{l} \int_0^L \frac{n_0}{2} (u''^2 + w''^2) dy + \int_0^L n_1 (u''\dot{u}'' + w''\dot{w}'') dy \\ + \int_0^L n_1 \Omega (-u''w'' + w''u'') dy \end{array} \right] \quad (62)$$

$$\left[\sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] U_T = I \left[\begin{array}{l} \int_0^L \frac{n_0}{2} (u''^2 + w''^2) dy + \int_0^L n_1 (u''\dot{u}'' + w''\dot{w}'') dy \\ + \int_0^L n_1 \Omega (-u''w'' + w''u'') dy + \int_0^L n_2 (w''\ddot{w}'' + u''\dot{u}'') dy \\ + \int_0^L 2n_2 \Omega (-u''\dot{w}'' + w''\dot{u}'') dy - \int_0^L n_2 \Omega^2 (w''^2 + u''^2) dy \end{array} \right] \quad (63)$$

3.2.3 Aplicação do método de Rayleigh-Ritz

Segundo SHAD (2011, pg.2147), o método de Rayleigh-Ritz é aplicado nos deslocamentos translacionais e angulares discretizados nas duas direções ortogonais independentes u e w conforme a Fig. 10.

Os deslocamentos nas direções x e z assim como as aproximações dos deslocamentos angulares em torno dos mesmos eixos são expressos pelo conjunto das Eq. (64). Apóstrofos ($'$) na função f (f') representa a derivada em relação à direção y .

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = f(y)U(t) = f(y)U \quad e \quad w(x,t) = f(y)W(t) = f(y)W \\ \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = f'(y)W = g(y)W \quad e \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = f''(y)W = h(y)W \\ \theta_z = -\frac{\partial u}{\partial y} = -f''(y)U = -g(y)U \quad e \quad \frac{\partial \theta_z}{\partial y} = -f''(y)U = -h(y)U \end{array} \right. \quad (64)$$

Segundo LALANNE (1998, pg. 17), a função de aproximação adotada é $f(y) = \text{sen}(\pi y/L)$, uma solução particular da parte espacial da solução exata de uma viga sob vibração livre não amortecida, representando o primeiro modo de deformação. A função também é válida para o caso de uma viga sob vibração livre amortecida, conforme pode ser verificado no Apêndice.

Introduzindo as relações contidas na Eq. (64) na Eq. (58) obtêm-se a energia cinética total, reescrita na forma compacta, Eq. (65).

$$\left\{ \begin{array}{l} T_R = \frac{1}{2} s_1 (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) - \frac{1}{2} \Omega s_2 \dot{U}W + m_u \Omega d_1 f(l_1) (\dot{U} \cos(\Omega t) - \dot{W} \text{sen}(\Omega t)) \\ s_1 = M_D f^2(l_1) + I_{D_x} g^2(l_1) + \rho A \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \\ s_2 = I_{D_y} g^2(l_1) + 2 \rho I \int_0^L g^2(y) dy \end{array} \right. \quad (65)$$

O potencial generalizado P reduz-se à energia de deformação U_T . Aplicando-se o operador $Den(\)$ ao potencial generalizado para os casos de um e dois campos ADF respectivamente, obtêm-se as Eq. (66) e (67). Os coeficientes n_k nas Eq. (68) estão associados à equação constitutiva correspondente a cada caso considerado.

$$\left[m_0 + m_1 \frac{d}{dt} \right] U_T = \left[k_0 (U^2 + W^2) + k_1 (U\dot{U} + W\dot{W}) + k_2 (-\Omega U\dot{W} + \Omega \dot{W}U) \right] \quad (66)$$

$$\left[m_0 + \sum_{k=1}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] U_T = \left[\begin{array}{l} k_0(U^2 + W^2) + k_1(U\dot{U} + W\dot{W}) + k_1\Omega(-UW + WU) \\ + k_2(U\ddot{U} + W\ddot{W}) + 2k_2\Omega(-U\dot{W} + W\dot{U}) - k_2\Omega^2(U^2 + W^2) \end{array} \right] \quad (67)$$

$$k_0 = \frac{In_0}{2} \int_0^L h^2(y) dy \quad k_1 = In_1 \int_0^L h^2(y) dy \quad k_2 = In_2 \int_0^L h^2(y) dy \quad (68)$$

As componentes das forças generalizadas F_U e F_W escritas na forma matricial nas Eq. (69) e (70), para os casos de um e dois campos ADF respectivamente são decorrentes do trabalho virtual da deformação na forma diferencial $\delta U_T = -F_U \delta U - F_W \delta W$.

$$\left[m_0 + m_1 \frac{d}{dt} \right] U_T = \left[m_0 + m_1 \frac{d}{dt} \right] \begin{bmatrix} -F_U \\ -F_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_0U + k_1\dot{U} - \Omega k_1W \\ 2k_0W + k_1\dot{W} + \Omega k_1U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & W \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\left[\sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] U_T = \left[\sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \begin{bmatrix} -F_U \\ -F_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_0U + k_1\dot{U} - k_1\Omega W \\ + k_2\ddot{U} - 2k_2\Omega\dot{W} \\ - 2k_2\Omega^2 U \\ 2k_0W + k_1\dot{W} + k_1\Omega U \\ + k_2\ddot{W} + 2k_2\Omega\dot{U} \\ - 2k_2\Omega^2 W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & W \end{bmatrix} \quad (70)$$

3.2.4 Equações do movimento – Modelo ADF

O operador diferencial $Den(\)$ é aplicado nos dois lados nas equações de Lagrange em sua primeira forma (AGUIAR, 2010, pg.40), obtendo-se as Eq. (71) e (72), que envolvem a energia cinética e as forças generalizadas.

$$\left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_R}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial T_R}{\partial U} \right] = \left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] F_U \quad (71)$$

$$\left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_R}{\partial \dot{W}} \right) - \frac{\partial T_R}{\partial W} \right] = \left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] F_W \quad (72)$$

E assim obtidas as equações para o caso de 1 campo ADF, Eq. (73) e (74)

$$\left[m_0 + m_1 \frac{d}{dt} \right] [s_1 \ddot{U} - \Omega s_2 \dot{W} - m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{sen}(\Omega t)] = -2k_0 U - k_1 \dot{U} + \Omega k_1 W \quad (73)$$

$$\left[m_0 + m_1 \frac{d}{dt} \right] [s_1 \ddot{W} + \Omega s_2 \dot{U} - m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{cos}(\Omega t)] = -2k_0 W - k_1 \dot{W} - \Omega k_1 U \quad (74)$$

e 2 campos ADF, Eq. (75) e (76)

$$\left[m_0 + \sum_{k=1}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] [s_1 \ddot{U} - \Omega s_2 \dot{W} - m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{sen}(\Omega t)] = -2k_0 U - k_1 \dot{U} + k_1 \Omega W - k_2 \ddot{U} + 2k_2 \Omega \dot{W} + 2k_2 \Omega^2 U \quad (75)$$

$$\left[m_0 + \sum_{k=1}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] [s_1 \ddot{W} + \Omega s_2 \dot{U} - m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{cos}(\Omega t)] = -2k_0 W - k_1 \dot{W} - k_1 \Omega U - k_2 \ddot{W} - 2k_2 \Omega \dot{U} + 2k_2 \Omega^2 W \quad (76)$$

Que desenvolvidas resultam em dois pares de equações do movimento acopladas, Eq. (77) e (78), para os casos de um e dois campos ADF respectivamente

$$\left\{ \begin{aligned} [M_3] \{\ddot{T}\} + [M_2] \{\ddot{T}\} + [M_1] \{\dot{T}\} + [M_0] \{T\} &= \left[\sum_{k=0}^l m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \{\mathfrak{R}\} \\ \{\mathfrak{R}\} &= \begin{bmatrix} P_U \\ P_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{sen}(\Omega t) \\ m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{cos}(\Omega t) \end{bmatrix} \\ [M_3] &= \begin{bmatrix} m_1 s_1 & 0 \\ 0 & m_1 s_1 \end{bmatrix} \\ [M_2] &= \begin{bmatrix} m_0 s_1 & -\Omega m_1 s_2 \\ \Omega m_1 s_2 & m_0 s_1 \end{bmatrix} \\ [M_1] &= \begin{bmatrix} k_1 & -\Omega m_0 s_2 \\ \Omega m_0 s_2 & k_1 \end{bmatrix} \\ [M_0] &= \begin{bmatrix} 2k_0 & -\Omega k_1 \\ \Omega k_1 & 2k_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (77)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
[M_4]\{\ddot{T}\} + [M_3]\{\dot{T}\} + [M_2]\{\ddot{T}\} + [M_1]\{\dot{T}\} + [M_0]\{T\} &= \left[\sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \{\mathfrak{R}\} \\
\{\mathfrak{R}\} = \begin{bmatrix} P_U \\ P_W \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{sen}(\Omega t) \\ m_u \Omega^2 d_1 f(l_1) \text{cos}(\Omega t) \end{bmatrix} \\
[M_4] = \begin{bmatrix} m_2 s_1 & 0 \\ 0 & m_2 s_1 \end{bmatrix} \quad [M_3] = \begin{bmatrix} m_1 s_1 & -\Omega m_2 s_2 \\ \Omega m_2 s_2 & m_1 s_1 \end{bmatrix} & \\
[M_2] = \begin{bmatrix} m_0 s_1 + k_2 & -\Omega m_1 s_2 \\ \Omega m_1 s_2 & m_0 s_1 + k_2 \end{bmatrix} & \\
[M_1] = \begin{bmatrix} k_1 & -(2k_2 - m_0 s_2)\Omega \\ (2k_2 - m_0 s_2)\Omega & k_1 \end{bmatrix} & \\
[M_0] = \begin{bmatrix} 2(k_0 - \Omega^2 k_2) & -k_1 \Omega \\ k_1 \Omega & 2(k_0 - \Omega^2 k_2) \end{bmatrix} &
\end{aligned} \right. \quad (78)$$

3.2.5 Equações do movimento – Modelo ADF caso particular

A Eq. (79) representa o potencial generalizado P do mesmo rotor sujeito às restrições da Eq. (44), velocidades de rotação e precessão constantes. V corresponde ao trabalho virtual de uma força externa de excitação, harmônica, com frequência φ e aplicada na posição L_1 da barra, escrito na forma diferencial na Eq. (80), parte integrante do potencial generalizado P .

$$P = k_0(U^2 + W^2) + k_1(U\dot{U} + W\dot{W}) + k_1\Omega(-UW + WU) + V \quad (79)$$

$$\delta V = F_0 \text{sen}\left(\frac{\pi L_1}{L}\right) \text{sen}(\varphi t) \delta U + F_0 \text{sen}\left(\frac{\pi L_1}{L}\right) \text{cos}(\varphi t) \delta W \quad (80)$$

A aproximação de Rayleigh-Ritz é aplicada para descrever o modo de flexão do eixo. A energia cinética do eixo corresponde à mesma expressão descrita na Eq. (65).

Reescrevendo o potencial generalizado P na forma matricial, Eq. (81), obtêm-se as forças generalizadas F_U e F_W .

$$P = \begin{bmatrix} F_U & F_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2k_0U + k_1\dot{U} - k_1\Omega W & 2k_0W + k_2\dot{W} + k_1\Omega U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$+ \begin{bmatrix} F_0f(l_1)\text{sen}(\varphi t) & F_0f(l_1)\text{cos}(\varphi t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$$

Aplicando as equações de Lagrange obtêm-se as equações de movimento, Eq. (82). Para o caso de excitação apenas por desbalanceamento, $F_0 = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_2]\{\ddot{T}\} + [M_1]\{\dot{T}\} + [M_0]\{T\} = \{\mathfrak{S}\} + \{\mathfrak{R}\} \\ \{\mathfrak{R}\} = \begin{bmatrix} m_u\Omega^2 d_1 f(l_1)\text{sen}(\Omega t) \\ m_u\Omega^2 d_1 f(l_1)\text{cos}(\Omega t) \end{bmatrix} \\ [M_2] = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \\ [M_1] = \begin{bmatrix} k_1 & -\Omega s_2 \\ \Omega s_2 & k_1 \end{bmatrix} \\ [M_0] = \begin{bmatrix} 2k_0 & -k_1\Omega \\ k_1\Omega & 2k_0 \end{bmatrix} \\ \{\mathfrak{S}\} = \begin{bmatrix} F_0f(l_1)\text{sen}(\varphi t) \\ F_0f(l_1)\text{cos}(\varphi t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (82)$$

3.2.6 Equações do movimento – Modelo histerético

Nas equações do movimento do rotor conforme modelo histerético, Eq.(84), o coeficiente k_1 depende da frequência relativa de excitação φ , que corresponde a $\dot{\phi}$, Eq. (53). No caso de um rotor, a frequência de deformação é igual a diferença entre a velocidade de rotação e a frequência da órbita lateral, Eq. (83) desconhecida, a priori. Se a velocidade de precessão ω for constante o sistema torna-se linear (MUSZYNSKA, 2005, pg. 107).

$$\varphi = \dot{\phi} = \Omega - \omega = \Omega - \frac{U\dot{W} - W\dot{U}}{U^2 + W^2}, \quad \Omega \neq \omega \quad (83)$$

$$\begin{cases}
[M_2]\{\ddot{T}\} + [M_1]\{\dot{T}\} + [M_0]\{T\} = \{\mathfrak{R}\} \\
[M_2] = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} & [M_1] = \begin{bmatrix} k_1 & -\Omega s_2 \\ \Omega s_2 & k_1 \end{bmatrix} \\
[M_0] = \begin{bmatrix} 2k_0 & -k_1\Omega \\ k_1\Omega & 2k_0 \end{bmatrix} & \{\mathfrak{R}\} = \begin{bmatrix} m_u\Omega^2 d_1 f(l_1) \text{sen}(\Omega t) \\ m_u\Omega^2 d_1 f(l_1) \text{cos}(\Omega t) \end{bmatrix}
\end{cases} \quad (84)$$

3.3 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS VISCOELÁSTICOS

Para materiais com amortecimento de natureza histerética seus parâmetros (fator de perda e módulo de Young) são obtidos da literatura, resultados de ensaios. Exemplos podem ser encontrados em LAZAN (1968) *apud* ZHANG (1993).

Uma viga com material, condições de apoio e geometria idênticos ao eixo do rotor, excitada por flexão unidirecional harmônica e na ausência de rotação do eixo, é usada para a determinação da função de transferência do modelo de referência, histerético (H_H). Uma função objetivo B_k para cada k -ésimo modelo (total de cinco modelos descritos na seção 3.4.1) é definida como a soma dos desvios absolutos entre os valores dos módulos de H_H e do modelo a ser aproximado, ADF ajustado (H_{ADF}), para cada i -ésima frequência de excitação. A função objetivo é mostrada na Eq. (85).

A função objetivo é minimizada utilizando algoritmo de otimização não linear. Os parâmetros assim obtidos são selecionados para inclusão nas equações de movimento de cada modelo correspondente.

A coleção de frequências ($i = 1 \dots N$) utilizada na otimização inclui valores que potencialmente ocorrem durante a rotação do eixo. A aproximação foi realizada na faixa de 0,01 a 2580,01 Hz, com intervalos iguais de 5 Hz.

$$B_k = \sum_{i=1}^N \text{abs} \left(\frac{H_{H_i} - H_{ADF_i}}{H_{H_i}} \right) + \sum_{i=1}^N \text{abs} \left(\frac{\text{Re al}(H_{H_i}) - \text{Re al}(H_{ADF_i})}{\text{Re al}(H_{H_i})} \right) \quad (85)$$

Os parâmetros viscoelásticos dos sólidos poliméricos são obtidos pela minimização de B , a soma dos desvios relativos entre os valores experimentais

e ajustados dos fatores de perda (η_E e η_A), e da parte real do módulo complexo de Young (E_E e E_A), Eq.(86).

Parâmetros já calculados por outros autores também são utilizados para a realização de comparações.

$$B = \sum_{i=1}^N abs\left(\frac{\eta_{E_i} - \eta_{A_i}}{\eta_{E_i}}\right) + abs\left(\frac{E_{E_i} - E_{A_i}}{E_{E_i}}\right) \quad (86)$$

3.3.1 Parâmetros viscoelásticos - Alumínio

São obtidos os potenciais generalizados P para cinco modelos de amortecimento. A aproximação de Rayleigh-Ritz foi aplicada para descrever o modo de flexão da viga:

- Modelo 1 (1S) – Rotação e precessão uniformes com um campo ADF – Eq.(87);
- Modelo 2 (2S) – Rotação e precessão uniformes com dois campos ADF – Eq. (87) ou Eq.(88);
- Modelo 3 (1C) – Rotação uniforme com um campo ADF – Eq.(87);
- Modelo 4 (2C) – Rotação uniforme com dois campos ADF – Eq. (88);
- Modelo 5 (H) – Modelo histerético – Eq.(87);

$$P = k_0 U^2 + k_1 U \dot{U} + V \quad (87)$$

$$P = k_0 U^2 + k_1 U \dot{U} + k_2 U \ddot{U} + k_3 U \ddot{\dot{U}} + k_4 U \ddot{\ddot{U}} + V \quad (88)$$

Nas Eq. (87) e (88) V é o trabalho virtual da força harmônica na direção U , aplicada na posição longitudinal y_0 da barra. Os demais termos das Eq. (87) e (88) são decorrentes da energia de deformação correspondente, Eq. (62) e (63).

V é descrito na forma diferencial na Eq. (89), enquanto que a energia cinética é descrita na Eq. (90)

$$\delta V = F_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\dot{\theta}) \delta U \quad (89)$$

$$T_R = \frac{I}{2} s_I \dot{U}^2 \quad (90)$$

Reescrevendo os potenciais generalizados, Eq. (91) e (92) , obtêm-se a força generalizada F_U

$$P = [F_U][U] = \left[- (2k_0 U + k_I \dot{U}) + \left(F_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\dot{\theta}) \right) \right] [U] \quad (91)$$

$$P = [F_U][U] = \left[- (2k_0 U + k_I \dot{U} + k_2 \ddot{U} + k_3 \ddot{\dot{U}} + k_4 \ddot{\dot{\dot{U}}}) + \left(F_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\dot{\theta}) \right) \right] [U] \quad (92)$$

Aplicando as equações de Lagrange obtêm-se as respectivas equações de movimento para os modelos 1, 2 e 5, Eq. (93), e opcionalmente para o modelo 2, Eq.(94).

$$s_I \ddot{U} + k_I \dot{U} + 2k_0 U = F_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\dot{\theta}) \quad (93)$$

$$k_4 \ddot{\dot{U}} + k_3 \ddot{\dot{\dot{U}}} + (m_0 s_I + k_2) \ddot{U} + k_I \dot{U} + 2k_0 U = F_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\dot{\theta}) \quad (94)$$

Para os modelos 3 e 4 as equações do movimento são obtidas aplicando-se as equações de Lagrange e o operador diferencial (ROY, 2016, pg 90), Eq. (95) e Eq. (96) respectivamente.

$$m_1 s_I \ddot{\dot{U}} + m_0 s_I \ddot{\dot{\dot{U}}} + k_I \dot{U} + 2k_0 U = \left[\sum_{k=0}^1 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \left[F_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\dot{\theta}) \right] \quad (95)$$

$$m_2 s_I \ddot{\dot{\dot{U}}} + m_1 s_I \ddot{\dot{\dot{\dot{U}}}} + (m_0 s_I + k_2) \ddot{U} + k_I \dot{U} + 2k_0 U = \left[\sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \left[F_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) \operatorname{sen}(\dot{\theta}) \right] \quad (96)$$

Aplicando a transformada de Laplace às equações do movimento, são obtidas as Funções de Transferência, Eq. (97) a (100), correspondentes às Eq. (93) a (96), na sequencia

$$H(s) = \frac{U(s)}{P_U(s)} = \frac{I}{m_0 s_1 s^2 + k_1 s + 2k_0} \quad (97)$$

$$H(s) = \frac{U(s)}{P_U(s)} = \frac{I}{k_4 s^4 + k_3 s^3 + (m_0 s_1 + k_2) s^2 + k_1 s + 2k_0} \quad (98)$$

$$H(s) = \frac{U(s)}{P_U(s)} = \frac{m_1 s + m_0}{m_1 s_1 s^3 + m_0 s_1 s^2 + k_1 s + 2k_0} \quad (99)$$

$$H(s) = \frac{U(s)}{P_U(s)} = \frac{m_2 s^2 + m_1 s + m_0}{m_2 s_1 s^4 + m_1 s_1 s^3 + (m_0 s_1 + k_2) s^2 + k_1 s + 2k_0} \quad (100)$$

Os parâmetros ajustados do alumínio para um e dois campos ADF são mostrados nas Tab. 2 e 3, respectivamente. Foram obtidos utilizando algoritmo genético disponível na ferramenta “Solver” do Microsoft Excel 2013, através da minimização simultânea das funções objetivo dos modelos com um campo anelástico (1S e 1C), e dois campos (2S e 2C). O fator de perda, módulo de elasticidade e densidade para o alumínio ($\eta = 5 \times 10^{-2}$, $E = 7,13 \times 10^{10}$ Pa e $\rho = 2500$ Kg/m³) foram obtidos de LAZAN (1968) *apud* (ROY, 2016, pg. 95). Os desvios médios percentuais (ξ_k) da função objetivo Δ_k são mostrados:

ξ_{med} : Erro médio em Δ .

ξ_{max} : Erro máximo no módulo de H .

Tabela 2 : Alumínio - Parâmetros viscoelásticos - 1 campo ADF

Modelo	b (s ⁻¹)	c	E (Pa)	ξ_{med}	ξ_{max}
1S				0,359%	2,803%
1C	222801	1,1025	$7,685 \times 10^{+11}$	0,291%	2,597%

Tabela 3: Alumínio - Parâmetros viscoelásticos - 2 campos ADF

Modelo	b_1 (s ⁻¹)	b_2 (s ⁻¹)	c_1	c_2	E_2 (Pa)	ξ_{med}	ξ_{max}
2S						0,189%	0,617%
2C	217198	240710	21618	1,1027	$7,685 \times 10^{+11}$	0,051%	0,092%

A representação gráfica do grau de ajuste do módulo das funções de transferência $H(s)$ dos modelos “S” e “C” em relação ao modelo “H” para o alumínio é mostrado no Anexo.

3.3.2 Parâmetros viscoelásticos – PVC

Neste trabalho são utilizados dois tipos distintos de polímeros, (PVC e PVC endurecido), ambos à 20 °C.

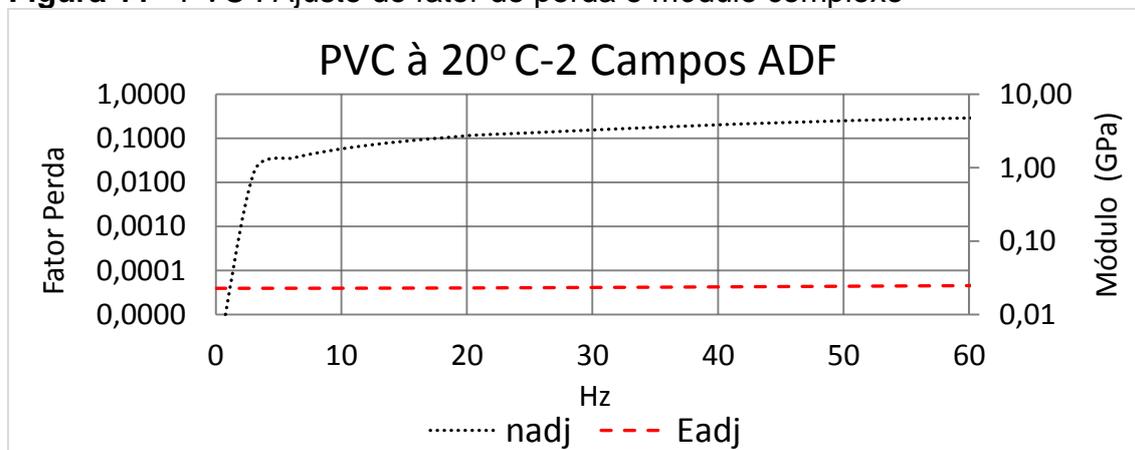
ASNANI (1971) e KAPUR (1977) *et. al. apud* ROY (2016, pg 10) extraíram parâmetros viscoelásticos para o PVC a partir de experimentos realizados em diferentes temperaturas. ROY (2016, pg 10) os utilizou na formulação de equações de movimento do rotor. Os resultados dos parâmetros obtidos para o caso do PVC são aqui utilizados como referência para validação do modelo. Os valores são mostrados na Tab. 4. A faixa de frequências utilizada para aproximação foi de 25 a 50 Hz.

Tabela 4: Parâmetros viscoelásticos para o PVC – ROY (2016, pg 10)

Modelo	b_1 (s ⁻¹)	b_2 (s ⁻¹)	c_1	c_2	E (Pa)
2C/2S	159,4867	$1,1730 \times 10^{+04}$	25,1428	1,1067	$4,003 \times 10^{+08}$

A Fig. 11 contém o ajuste do fator de perda (n_{adj}) e do módulo complexo (E_{adj}) na faixa de frequência de 0 a 60 Hz.

Figura 11 - PVC : Ajuste do fator de perda e módulo complexo



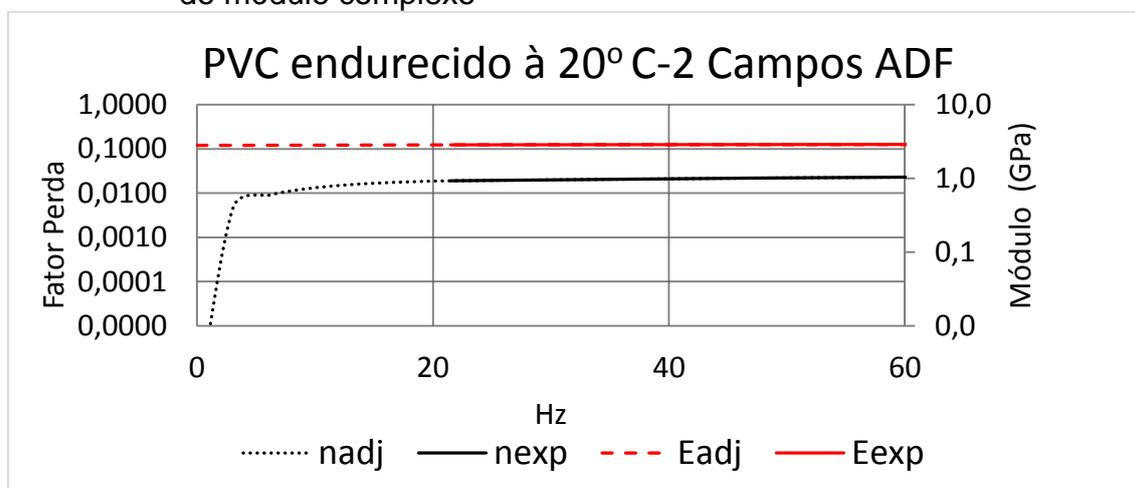
Adicionalmente foram também utilizados parâmetros para o PVC endurecido, aproximados a partir dos resultados de experimento publicado por GONZE (1973, pg 322). A minimização da função objetivo foi realizada considerando a faixa de frequências de 21,5 a 60,5 Hz. A Tab. 5 contém os valores obtidos. ξ_η é o erro máximo dentre as amostras na aproximação do fator de perda enquanto que ξ_E , identicamente é o erro máximo para a parte real do módulo complexo, ambos para 2 campos ADF.

Tabela 5: PVC endurecido - Parâmetros viscoelásticos – 2 Campos ADF

Modelo	b_1 (s ⁻¹)	b_2 (s ⁻¹)	c_1	c_2	E (Pa)	ξ_η	ξ_E
2C/2S	178,057	20,427	20,931	40,932	3,0222E+09	0,001%	0,002%

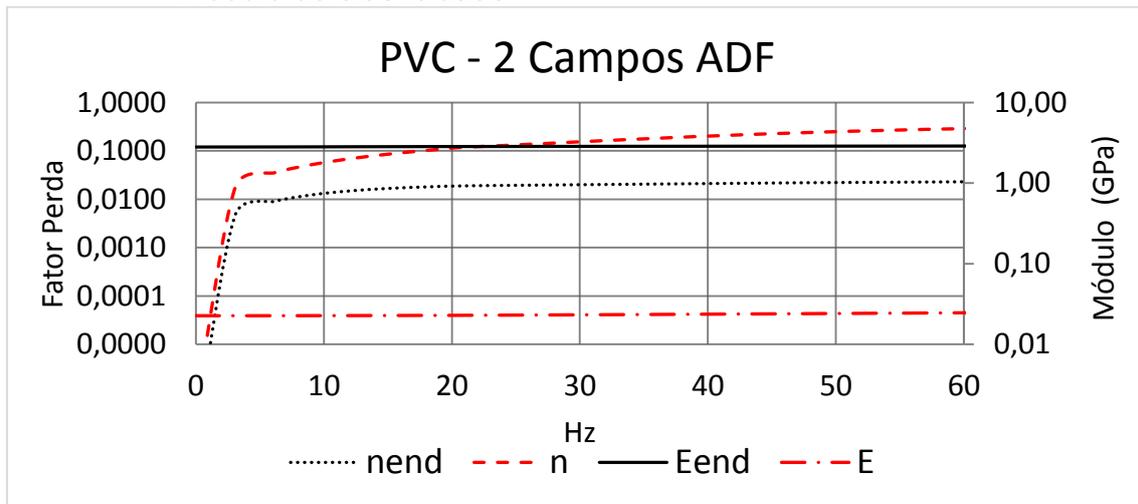
A visualização gráfica do grau de ajuste dos parâmetros (adj) em relação aos dados experimentais (exp) é mostrada na Fig.(12).

Figura 12 - PVC endurecido – Dois campos ADF - Ajuste do fator de perda e do módulo complexo



A comparação gráfica dos valores ajustados entre os dois tipos de PVC são mostrados na Fig. 13. O sufixo “end” refere-se ao PVC endurecido. Nota-se que o módulo de elasticidade (rigidez) do PVC endurecido é significativamente maior quando comparado ao do PVC, enquanto que o inverso ocorre para o fator de perda. A avaliação dos motivos estão fora do escopo deste trabalho.

Figura 13 - PVC e PVC endurecido – Comparativo entre os fatores de perda e módulo de elasticidade



4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção são aplicados os modelos resultantes das seções anteriores e analisados na sequência. São obtidos os diagramas de Campbell, VLE's, UBR e órbitas:

- Para o rotor em alumínio, os modelos 1S, 2S, 1C e 2C são comparados em relação ao modelo H.
- Para o rotor em PVC, as VLE's dos modelos 1C e 2C são comparados em relação ao modelo de ROY (2016), para validação dos modelos "C";
- Para o rotor em PVC endurecido, o modelo 2C é comparado com o modelo 2C em PVC;
- Para o rotor nos dois tipos de PVC, os modelos 1S e 2S são comparados em relação aos modelos 1C e 2C;

Todas as soluções numéricas são obtidas utilizando códigos diversos no software SCILAB 5.5.2.

Considerando o modelo H, a priori, a velocidade ω é desconhecida.

De acordo com MUSZYNSKA (2005, pg. 108), no limiar de instabilidade o movimento lateral do rotor é periódico e sua frequência natural idêntica ao caso não amortecido, determinado exclusivamente pela rigidez e pela massa. Para o caso estável (abaixo do limiar de instabilidade), a frequência natural é ligeiramente inferior, devido ao amortecimento. Para velocidades a partir da frequência natural (do caso não amortecido) os fatores não lineares tornam-se significativos e o pressuposto de linearidade não é mais adequado.

Com um grande percentual de probabilidade, confirmado por experimentos e observações práticas, ω pode portanto, ser igual à frequência natural do primeiro modo lateral do rotor MUSZYNSKA (2005, pg. 108). Assim, os modelos H são simulados assumindo-se resposta (quase) síncrona ($\omega = 0,999\Omega$) de forma a evitar a indeterminação que ocorre na Eq.(53) quando $\omega = \Omega$. Já os modelos "S" são simulados assumindo resposta síncrona exata ($\omega = \Omega$).

Diferenças relativas menores ou iguais que 5 % obtidas nas aproximações das VLE's, amplitude das órbitas e velocidades críticas são arbitradas aqui como satisfatórias, validando a simulação em relação ao modelo de referência;

4.1 DIAGRAMAS DE CAMPBELL, UBR E VLE

Para os sistemas lineares as equações do movimento Eq. (77), (78), (82) e (84) são equivalentes à Eq.(101), resolvidas no domínio do tempo, com o sistema reduzido em espaços de estado, Eq. (102) obtendo-se assim as órbitas.

A resolução da Eq. (101) no domínio de Laplace para vibrações livres, com $\{\mathfrak{R}\} = [0]$, permite elaborar os diagramas de Campbell e calcular as frequências naturais e VLE's.

$$[M_{p+2}] \frac{d^{p+2}}{dt^{p+2}} [T] + [M_{p+1}] \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} [T] + \dots + [M_0] [T] = \left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \{\mathfrak{R}\} \quad (101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\dot{X}\} = [A]\{X\} + \sum_{i=0}^p [B_i] \frac{d^i}{dt} \{\mathfrak{R}\} \\ \{Y\} = [C]\{X\} \\ \{X\} = \begin{Bmatrix} [X_1] \\ \vdots \\ [X_{p+2}] \end{Bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] & \dots & [0] \\ \vdots & \dots & [I] & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & [I] \\ [A_1] & \dots & \dots & [A_{p+2}] \end{bmatrix} \quad [B_i] = m_i \begin{Bmatrix} [0] \\ \vdots \\ [I] \end{Bmatrix} \\ [A_i] = [-M_{p+2}^{-1}][M_i] \quad \{Y\} = \text{sen}\left(\pi \frac{L_i}{L}\right) \begin{Bmatrix} [T] \\ [0] \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad [C] = [[I] \quad [0] \quad \dots \quad \dots] \\ [T] = \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} \quad \{\mathfrak{R}\} = \begin{Bmatrix} P_U \\ P_W \end{Bmatrix} \quad [X_i] = \frac{d^{i-1}}{dt} [T] \end{array} \right. \quad (102)$$

4.1.1 Rotor em alumínio – VLE e Diagramas de Campbell

A Tab. 6 contém as características do rotor utilizado nos modelos em alumínio.

Tabela 6: Rotor em alumínio-Parâmetros geométricos (LALLANE, 1998, pg.20)

Parâmetro	d_l (m)	h (m)	L_l (m)	L (m)	R_l (m)	R_2 (m)	m_u (Kg)
Valor	0,15	0,03	0,1333	0,4	0,01	0,15	10×10^{-4}

As VLE's e diagramas de Campbell do modelo H são mostrados na Fig. 14, e utilizados como referência para verificação dos demais modelos. As Fig. 15, 16, 17 e 18 contém os resultados equivalentes para os modelos 1S, 2S, 1C e 2C.

As VLE's dos modelos 2C e 1C, Fig. 15 não se aproximam da VLE do modelo H, mostrada na Fig. 14.

Das Fig. 14 e 16, as VLE's dos modelos 1S e 2S aproximam satisfatoriamente, com diferenças menores que 0,19 %.

Figura 14 - VLE e diagrama de Campbell – Rotor em alumínio - Modelo H

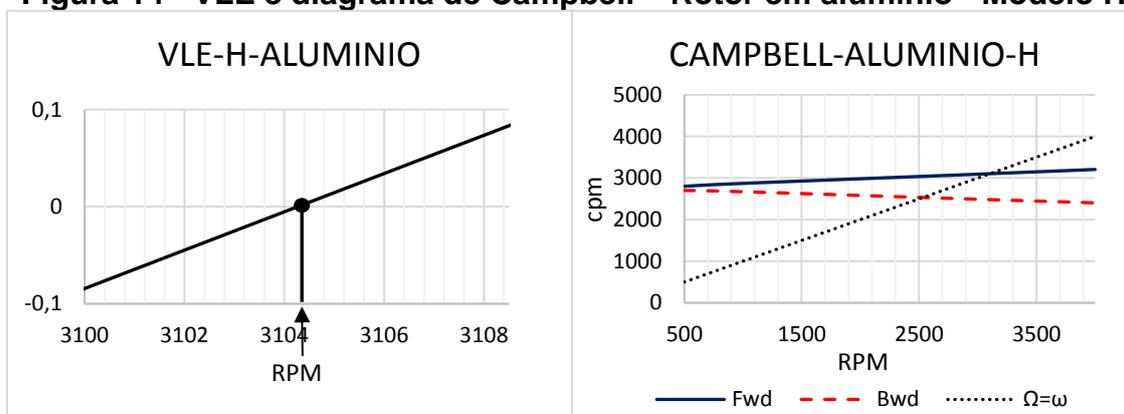


Figura 15 - VLE : Rotor em alumínio - Modelos 2C e 1C

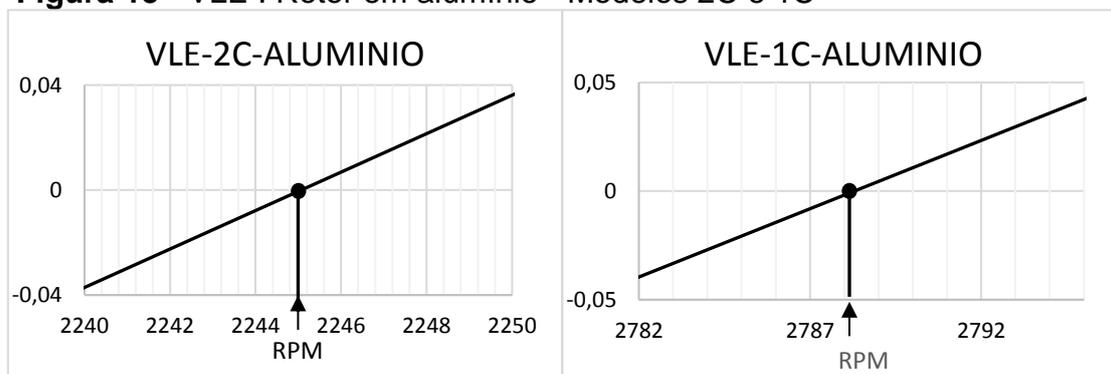
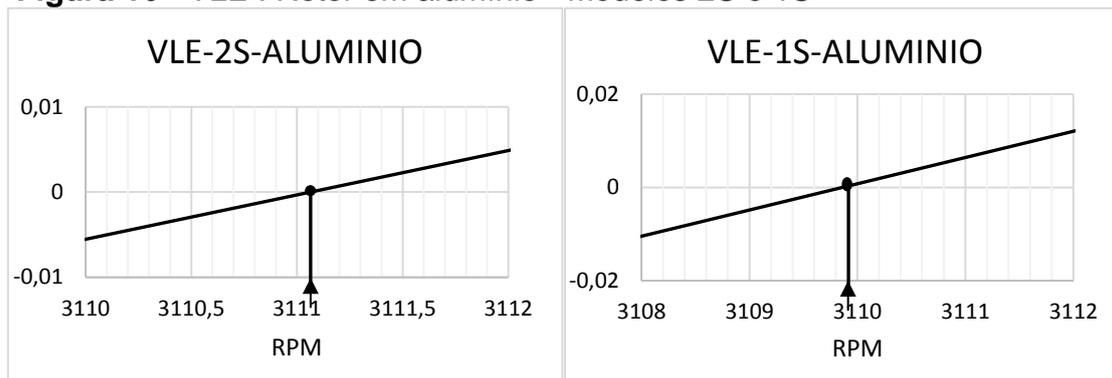
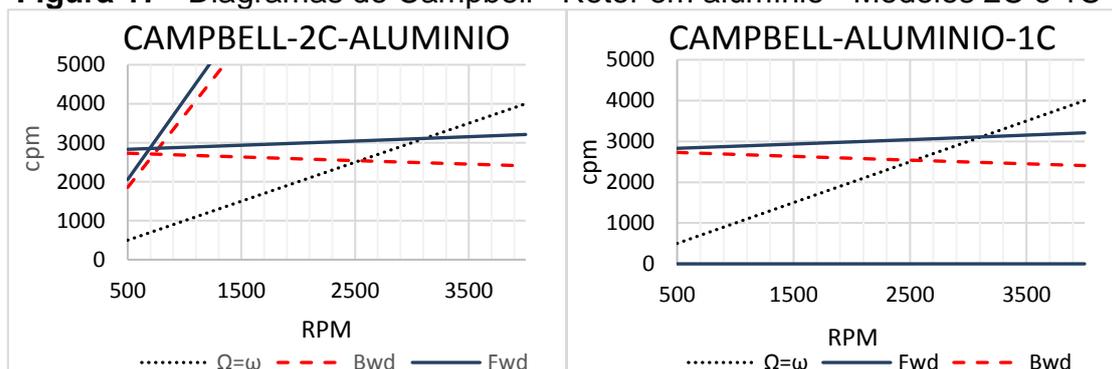
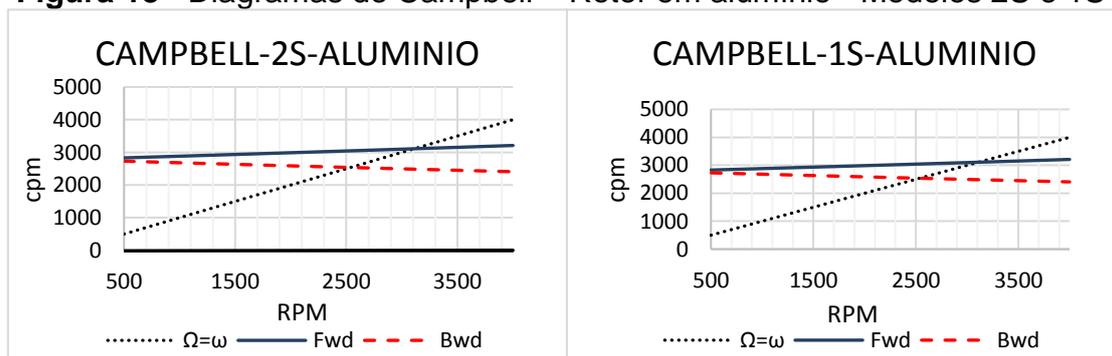


Figura 16 - VLE : Rotor em alumínio - Modelos 2S e 1S

Comparando os diagramas de Campbell das Fig. 14 e 17, duas linhas de frequências naturais dos modelos 1C e 2C coincidem com a do modelo H. Em especial, no modelo 2C, ocorrem duas linhas adicionais de frequências naturais que nunca coincidirão com a linha síncrona ($\Omega = \omega$).

Figura 17 - Diagramas de Campbell - Rotor em alumínio - Modelos 2C e 1C**Figura 18 - Diagramas de Campbell – Rotor em alumínio - Modelos 2S e 1S**

A Tab. 7 resume as diferenças percentuais das VLE's dos modelos ADF em relação ao modelo de referência.

Tabela 7: Rotor em alumínio - Diferenças % relativas das VLE's dos modelos ADF em relação ao modelo H

Modelo	Referencia		ADF		
	H	1S	2S	1C	2C
VLE (RPM)	3105	3110	3111	2789	2245
Diferença %	-	0,16%	0,19%	10,17%	27,69%

4.1.2 Rotor em alumínio – UBR

A Fig. 19a compara graficamente as UBR's entre os modelos H, 1S e 2S enquanto que na Fig. 19b entre os modelos H, 1C e 2C.

Para o rotor do modelo H somente a 2ª frequência ocorrida no diagrama de Campbell (3104 RPM) é uma velocidade crítica. Para órbitas circulares, síncronas e velocidade de rotação constante, a flexão do rotor durante o movimento orbital é "congelada", tornando-o não sujeito a deformação periódica e consequentemente também não sujeito ao amortecimento interno (MUSZYNSKA, 2005, pg. 110), e assim, uma vez que o rotor é simétrico, de acordo com NELSON, (2007, pg. 4) o vetor da força gerada no modo *backward* é ortogonal à força de desequilíbrio e portanto, a energia não pode ser adicionada, explicando porque a 1ª frequência natural não é excitada.

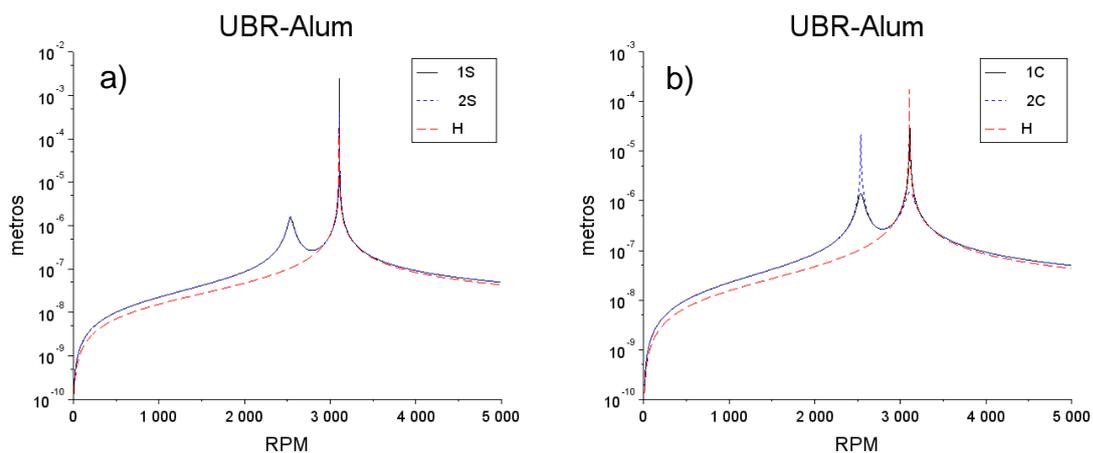
O movimento lateral do rotor é harmônico, com limiar de estabilidade definido pela frequência natural não amortecida, determinada exclusivamente pela rigidez e pela massa (MUSZYNSKA, 2005, pg. 108).

As 2ªs velocidades críticas dos modelos 1S, 2S, 1C e 2C ocorrem muito próximas ao valor da velocidade crítica do modelo H. Nestes quatro modelos, a ocorrência da 1ª velocidade crítica no modo "*backward*" indica que o desbalanceamento pode excitar a precessão retrógrada.

As UBR's dos modelos 1S, 2S, 1C e 2C não são idênticas ao do modelo H por todo o espectro de frequências, exceto nas frequências próximas às suas 2ªs velocidades críticas e acima das mesmas.

As 2ªs velocidades críticas dos modelos 1S, 2S, 1C e 2C aproximam-se da velocidade crítica do modelo H com diferenças relativas menores que 0,2 %;

Figura 19: UBR – Rotor em alumínio a) 1S x 2S x H e b) 1C x 2C x H



4.1.3 Rotor em alumínio – Órbitas

Para validar a ocorrência das VLE's previstas são obtidas as órbitas para os modelos 1S e 2S em 3 situações distintas: a) 5% abaixo da VLE, b) À VLE e c) 5% acima da VLE. As formas das órbitas, Fig. 20c, 21c e 22c confirmam a ocorrência das instabilidades nas velocidades previstas. Acima da VLE, a amplitude da órbita diverge exponencialmente. Nas Fig. 20a, 21a e 22a, os modelos 1S e 2S possuem órbitas com amplitudes idênticas à do modelo H.

Figura 20: Órbitas - Rotor em alumínio – Modelo H - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE, e c) 5% acima da VLE.

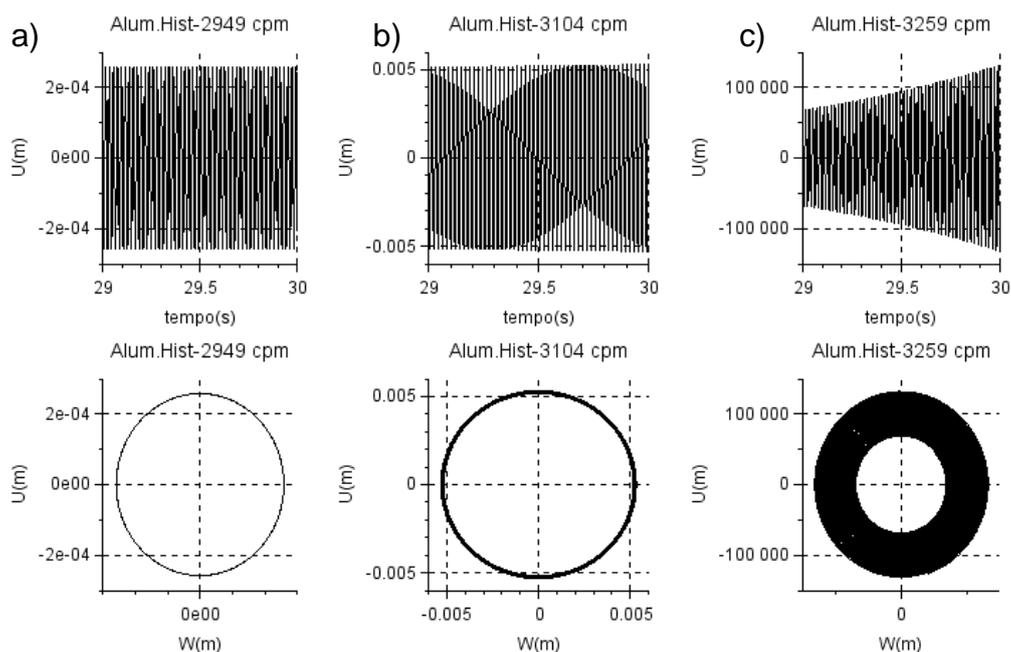


Figura 21: Órbitas - Rotor em alumínio – Modelo 1S - a) 5% abaixo da VLE, b) À VLE, e c) 5% acima da VLE.

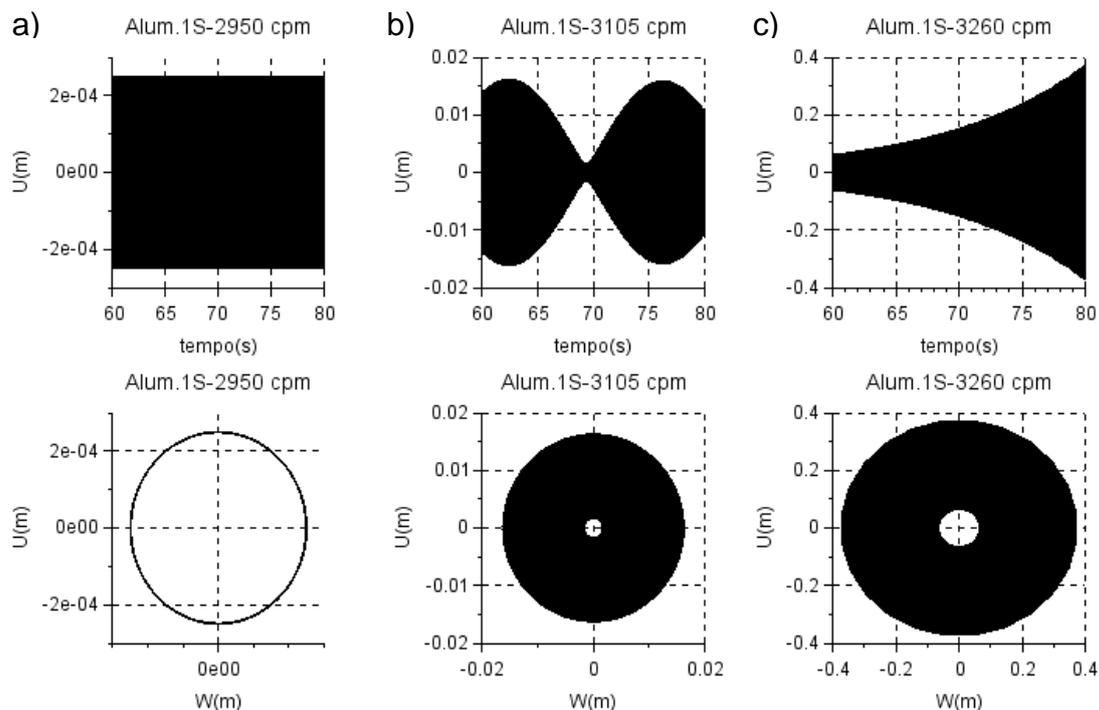
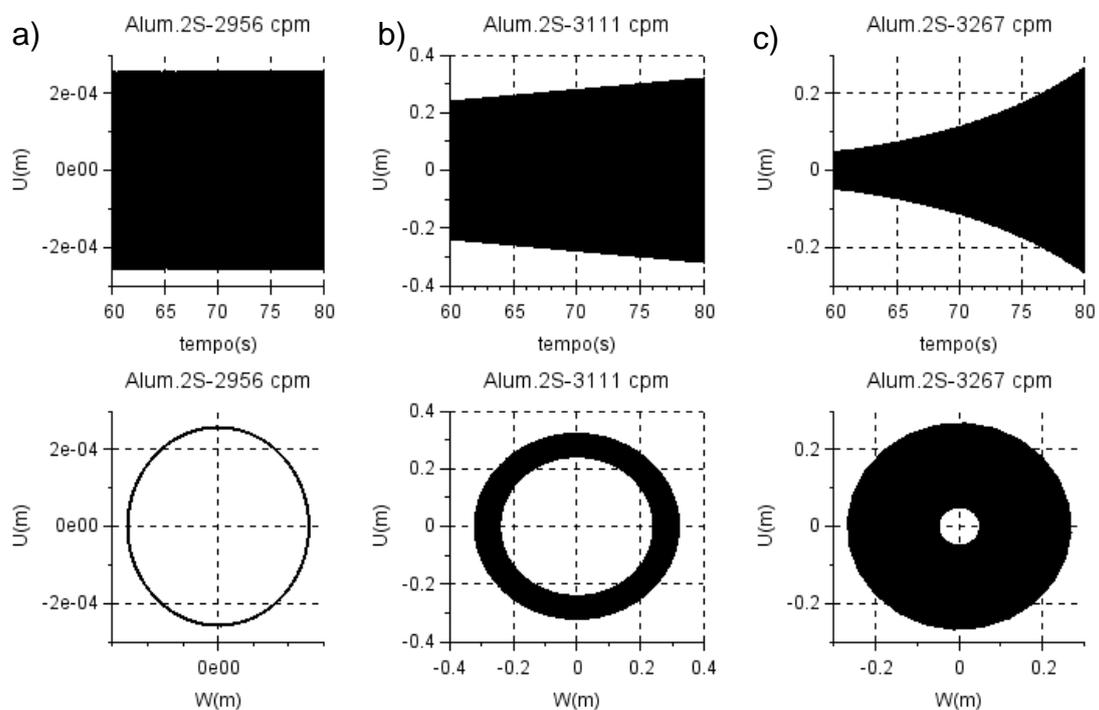


Figura 22: Órbitas - Rotor em alumínio – Modelo 2S - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE, e c) 5% acima da VLE.



4.1.4 Rotor em alumínio – Resumo

O Quadro 1 resume de forma qualitativa as aproximações obtidas do rotor em alumínio para os modelos 1S, 2S, 1C e 2C, em relação ao modelo hysterético linear (H). Os modelos “S” concordam com o modelo “H”, o que não ocorrem os modelos “C”.

Quadro 1 : Rotor em alumínio – Resumo qualitativo das aproximações dos parâmetros do modelo ADF em relação ao modelo hysterético

Modelo	VLE	Amplitude Órbita	Velocidades críticas
1S	Satisfatória	Satisfatória	Satisfatória
2S	Satisfatória	Satisfatória	Satisfatória
1C	Insatisfatória	Satisfatória	Satisfatória
2C	Insatisfatória	Satisfatória	Satisfatória

4.1.5 Rotor em PVC – VLE e Diagramas de Campbell

A Tab. 8 contém os parâmetros geométricos do modelo de rotor utilizado para a simulação do rotor em PVC

Tabela 8 : Parâmetros geométricos do rotor em PVC (ROY, 2016, pg.9)

Parâmetro	d_1 (m)	h (m)	L_1 (m)	L (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	m_u (Kg)
Valor	0,05	0,02	0,175	0,35	0,0175	0,05	$2,0 \times 10^{-04}$

Para o PVC são obtidas as VLE's e diagramas de Campbell para os modelos 1C, 2C, 1S e 2S. As Fig. 23 e 24 contém as VLE's enquanto as Fig. 25 e 26 os diagramas de Campbell correspondentes.

Nos diagramas de Campbell dos modelos “S”, Fig. 25, ocorre pouca distinção entre as linhas dos modos de precessão direta e retrógrada, *Forward* (Fwd) e *Backward* (Bwd) respectivamente.

Figura 23 - VLE's - Rotor em PVC – Modelos 2S e 1S

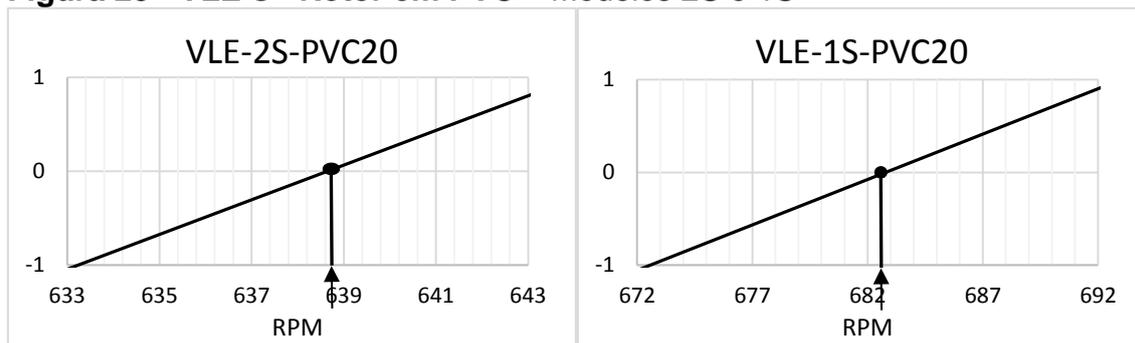


Figura 24 - VLE's – Rotor em PVC - Modelos 2C e 1C

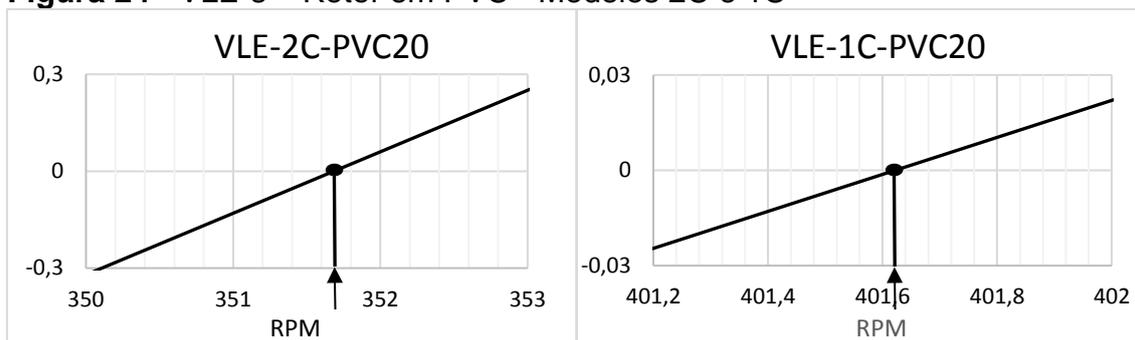


Figura 25 - Diagramas de Campbell - Rotor em PVC - Modelos 2S e 1S

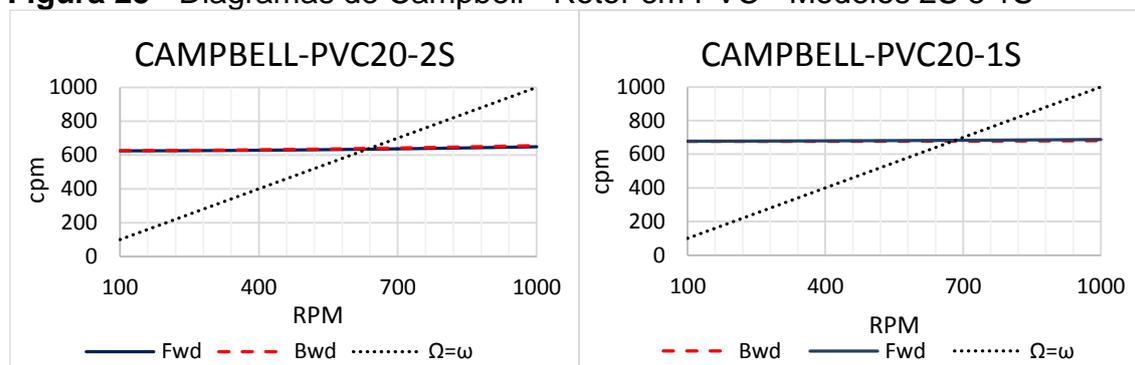
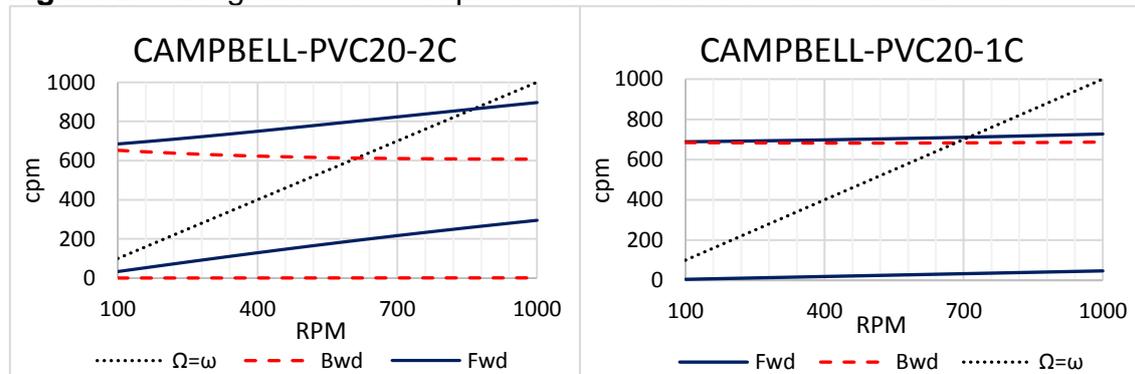


Figura 26 - Diagramas de Campbell - Rotor em PVC - Modelos 2C e 1C



A Tab. 9 compara as VLE's calculadas nos modelos 1S, 2S, 1C e 2C em relação aos valores obtidos por ROY (2016, pg. 12-13). O artigo apresenta dois valores distintos de VLE, onde o autor não explicita a correspondência de cada VLE com o modelo correspondente (um ou dois campos ADF). A correspondência de cada VLE é presumida com base na comparação dos valores (412 RPM e 302 RPM) apresentados no artigo versus os valores calculados neste trabalho. Os modelos 1C e 2C apresentam diferença percentual menor que 1,67 %, validando os modelos.

Os modelos 1S e 2S não apresentaram aproximações significativas.

Tabela 9 - VLE's (RPM) : Rotor em PVC à 20°C - Modelos 1S, 1C, 2S e 2C

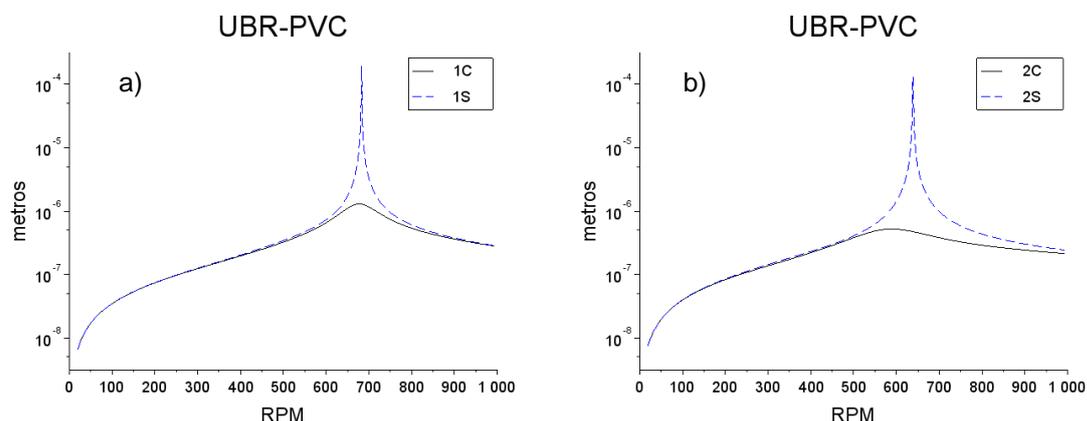
Material	Referência	Modelo ADF					
		1 campo / 2 campos	1S	1C	2S	2C	
PVC 20°C	ASNANI (1971) <i>apud</i> ROY (2016)	412	302	683	408	639	307

A razão das aproximações insatisfatórias das VLE's nos modelos 1S e 2S tem como principal hipótese o elevado grau de amortecimento dos polímeros, que afeta significativamente o pressuposto da velocidade de precessão uniforme nestes modelos alterando significativamente a estimativa da VLE.

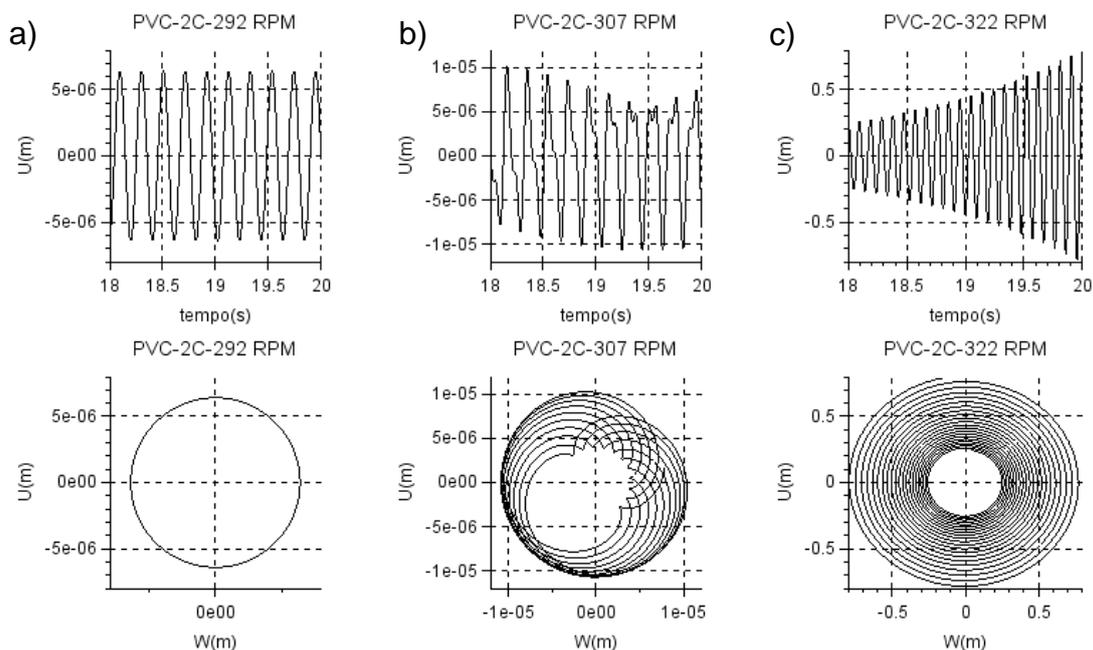
4.1.6 Rotor em PVC – UBR

A Fig. 27a compara as UBR entre os modelos 1S e 1C enquanto a Fig. 27b entre os 2S e 2C. Nos modelos 1S e 2S, à velocidades abaixo das VLE's dos modelos 1C e 2C (408 RPM e 307 RPM), as UBR's são equivalentes.

Figura 27 - UBR : Rotor em PVC a) 1C x 1S e b) 2C x 2S

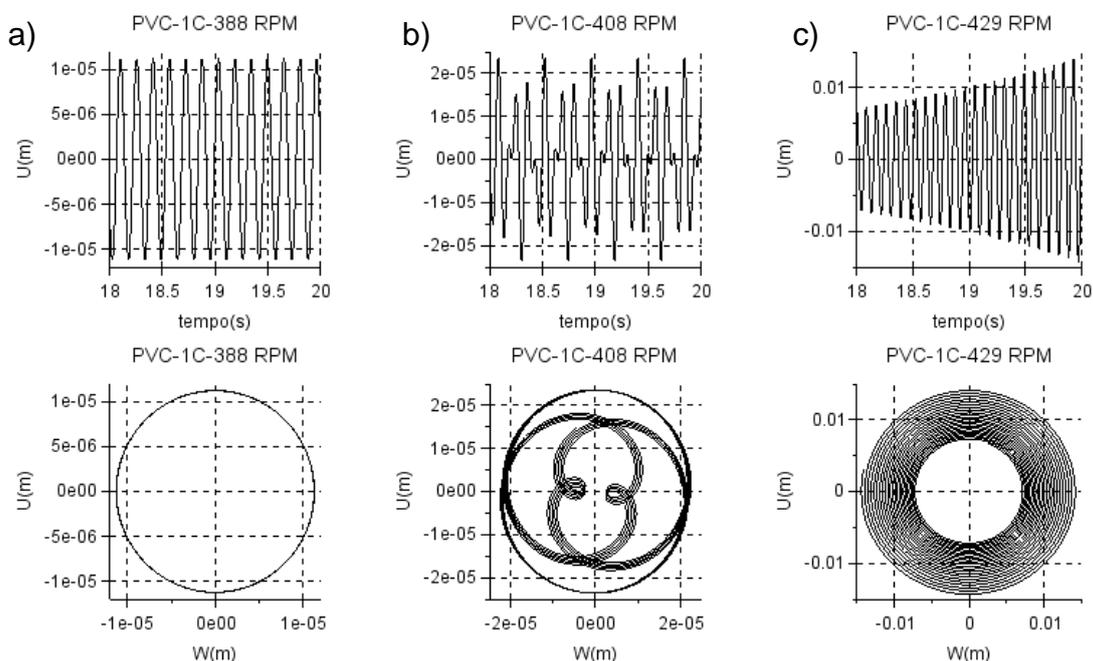


4.1.7 Rotor em PVC – Órbitas



As órbitas dos modelos 1C e 2C são mostradas em 3 situações distintas nas Fig. 28 e 29: a) 5% abaixo da VLE, b) À VLE e c) 5% acima da VLE. Identicamente à comparação realizada no rotor em alumínio, a forma divergente das órbitas nas Fig. 28c e 29c confirmam a ocorrência das instabilidades nas velocidades previstas.

Figura 28 - Órbitas - Rotor em PVC – Modelo 1C - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE e c) 5% acima da VLE



frequências naturais são superiores à VLE (333 RPM), portanto o rotor incidirá em regime de instabilidade antes do atingimento das velocidades críticas.

As forças tangenciais introduzidas pelo amortecimento interno do material aumentam com a velocidade de rotação do rotor, influenciando consideravelmente no comportamento dinâmico, desestabilizando o sistema. No diagrama de Campbell é possível observar o fenômeno de curvatura das linhas de frequências próprias (“Curve Veering”), tal como mostrado na Fig. 31. Quando duas linhas distintas de frequências próprias se aproximam, as mesmas não se cruzam, divergindo abruptamente e mantendo a continuidade, trocando de direção uma em relação à outra. Tal fenômeno foi ilustrado por pesquisadores como CRANDAL e YEH (1989), e JEI e LEE (1992) *apud* ROY (2017, pg 71).

Assim como no modelo em PVC, no modelo em PVC endurecido o diagrama de Campbell da Fig. 32 também mostra que no modelo “2S” a linha de precessão direta (Fwd) se confunde com a de precessão retrógrada (Bwd).

A VLE do modelo 2S em PVC endurecido (de maior rigidez), Fig. 30, (7102 RPM), é dramaticamente maior quando comparada com a do mesmo modelo em PVC (639 RPM), Fig. 23. Destaca-se que a sensibilidade ao aumento da VLE devido ao aumento da rigidez do material é mais acentuada nos modelos 2S uma vez que a diferença entre as VLE’s dos modelos 2S e 2C (7102-639=6463 RPM) é maior que a mesma diferença no modelo 2C (333-307=34 RPM).

Figura 30 - VLE’s - Rotor em PVC - Modelos 2C e 2S

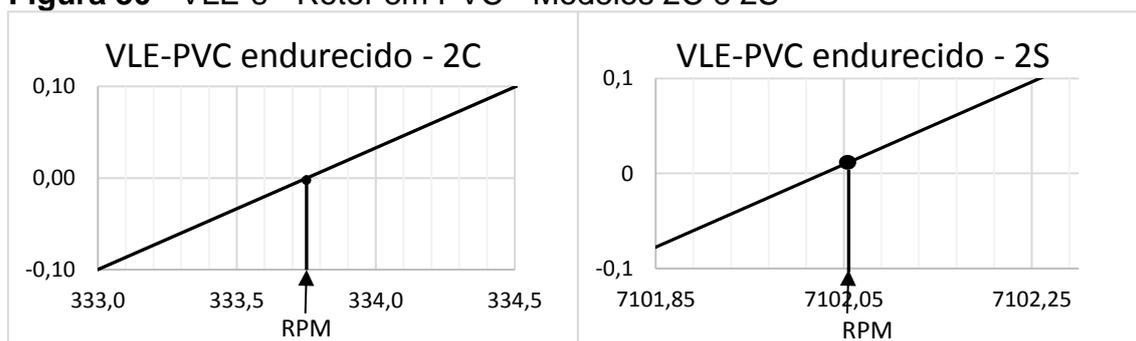


Figura 31 - Diagrama de Campbell - Rotor em PVC endurecido - Modelo 2C

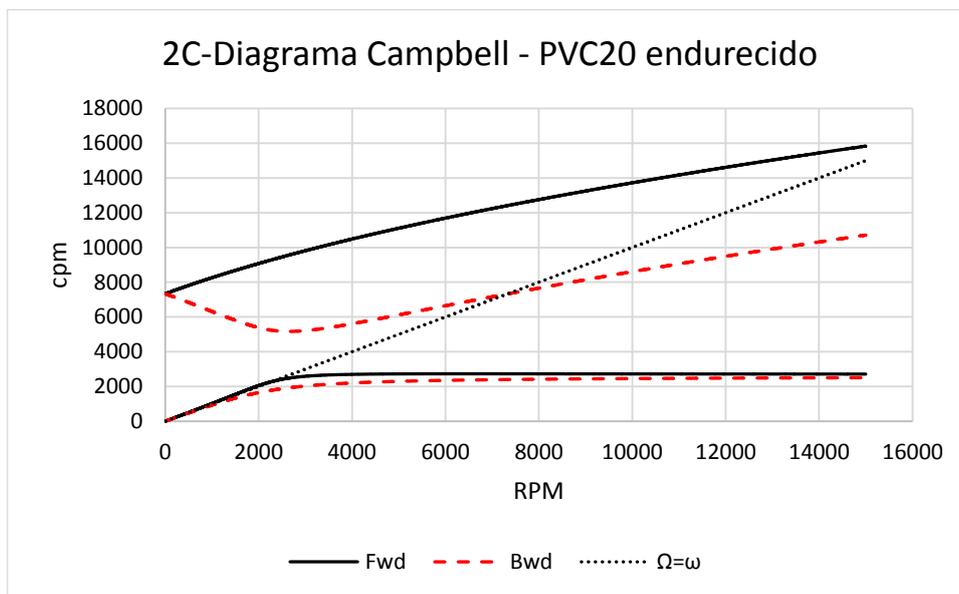
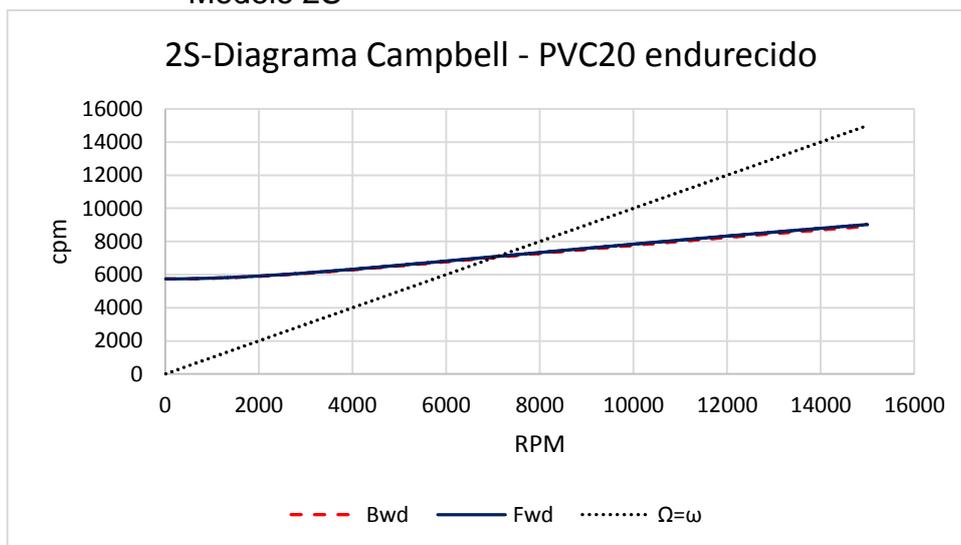


Figura 32 - Diagrama de Campbell - Rotor em PVC endurecido - Modelo 2S

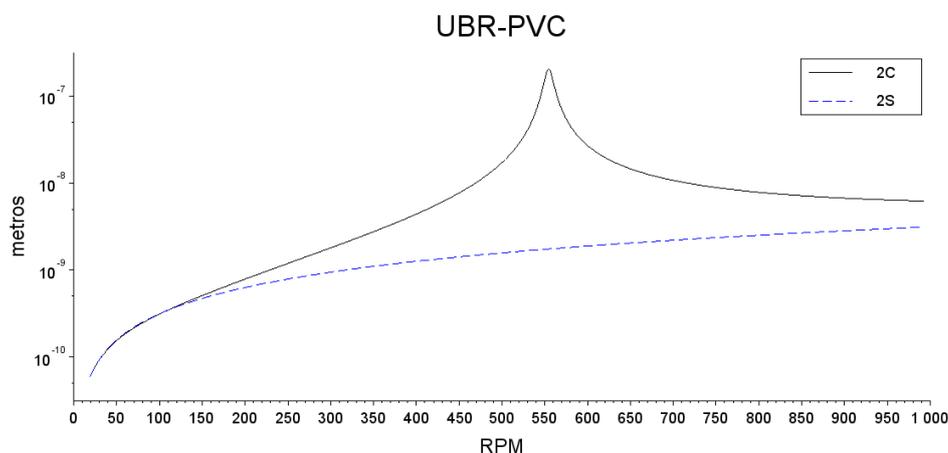


4.1.9 Rotor em PVC endurecido – UBR

A Fig. 33 compara as respostas ao desbalanceamento entre os modelos 2S e 2C até a velocidade de 1000 RPM. A VLE do modelo 2C (333 RPM) ocorre em valor inferior à da 1ª velocidade crítica (554 RPM), portanto o rotor torna-se instável antes mesmo de atingir a 1ª velocidade crítica.

As respostas ao desbalanceamento são similares até a velocidade de 109 RPM. A partir deste valor as amplitudes dos dois modelos divergem.

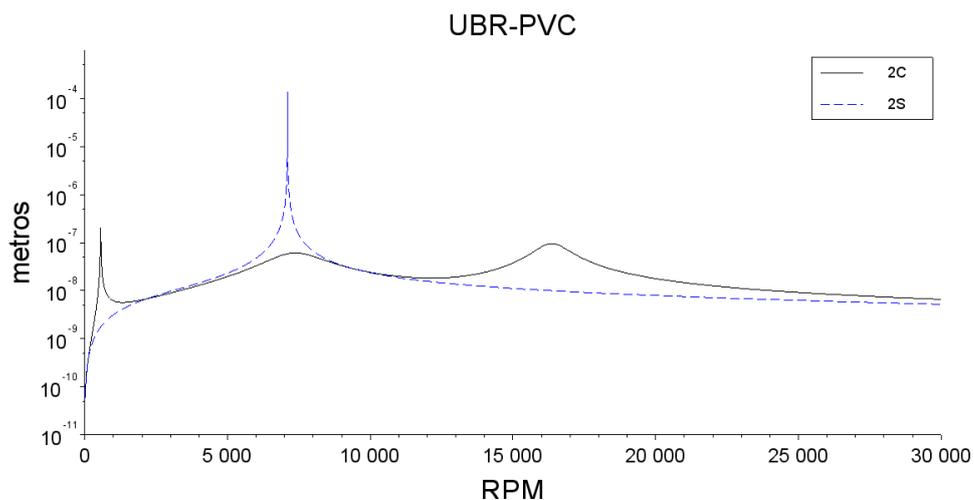
Figura 33 - UBR – Rotor em PVC endurecido - Modelo 2C – 20 a 1000 RPM



Considerando um espectro amplo de velocidades, (20 a 30000 RPM), as velocidades críticas dos dois modelos não se aproximam conforme mostrado na Fig. 34.

Na Fig. 34 o modelo 2C, com dois graus de liberdade, apresenta três velocidades críticas devido à ordem da equação do movimento (4ª ordem) decorrentes do efeito viscoelástico dos dois campos ADF. Polinômios de ordem ordem quatro podem apresentar até quatro raízes, conforme mostrado no diagrama de Campbell da Fig. 31. O efeito viscoelástico introduz assimetria no rotor, que associado ao efeito giroscópico, resulta na ocorrência de mais que duas velocidades críticas. Entretanto esse efeito não tem relevância prática uma vez que conforme mencionado, o rotor torna-se instável antes mesmo de atingir a 1ª velocidade crítica.

Figura 34 - UBR – Rotor em PVC endurecido - Modelos 2C x 2S – 20 a 30000 RPM



4.1.10 Rotor em PVC endurecido – Órbitas

Para velocidades acima da VLE o aumento da amplitude das órbitas ao decorrer do tempo confirmam a ocorrência de instabilidade dos modelos 2C e 2S, Fig. 35c e 36c.

Figura 35 - Órbitas – Rotor em PVC endurecido - Modelo 2C - a) 5% abaixo da VLE b) VLE e c) 5% acima da VLE.

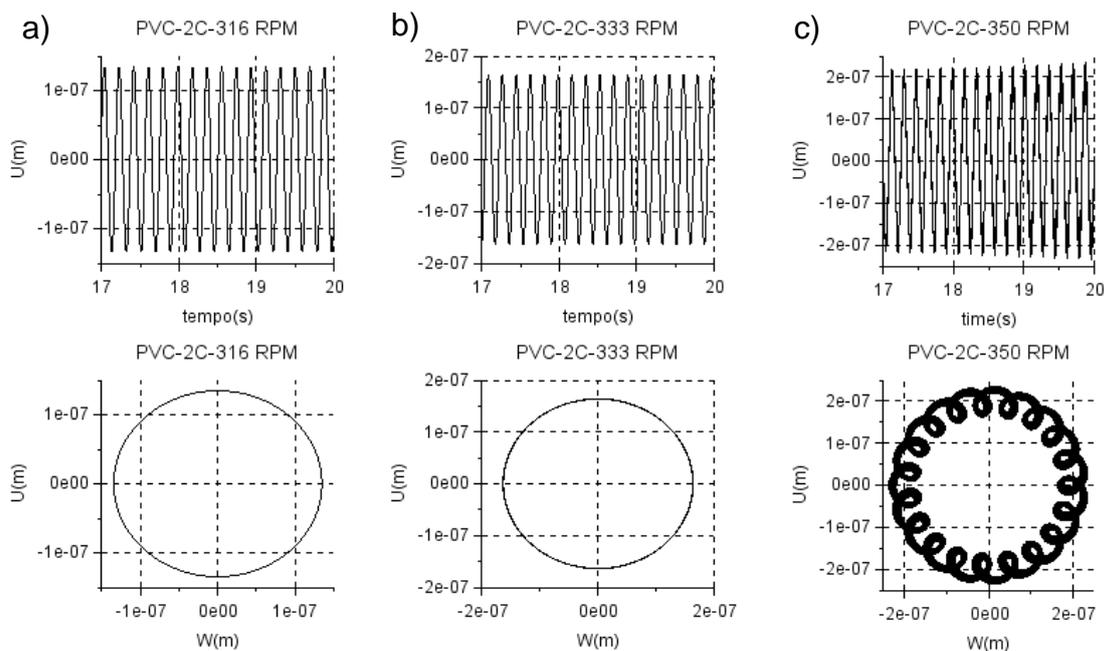
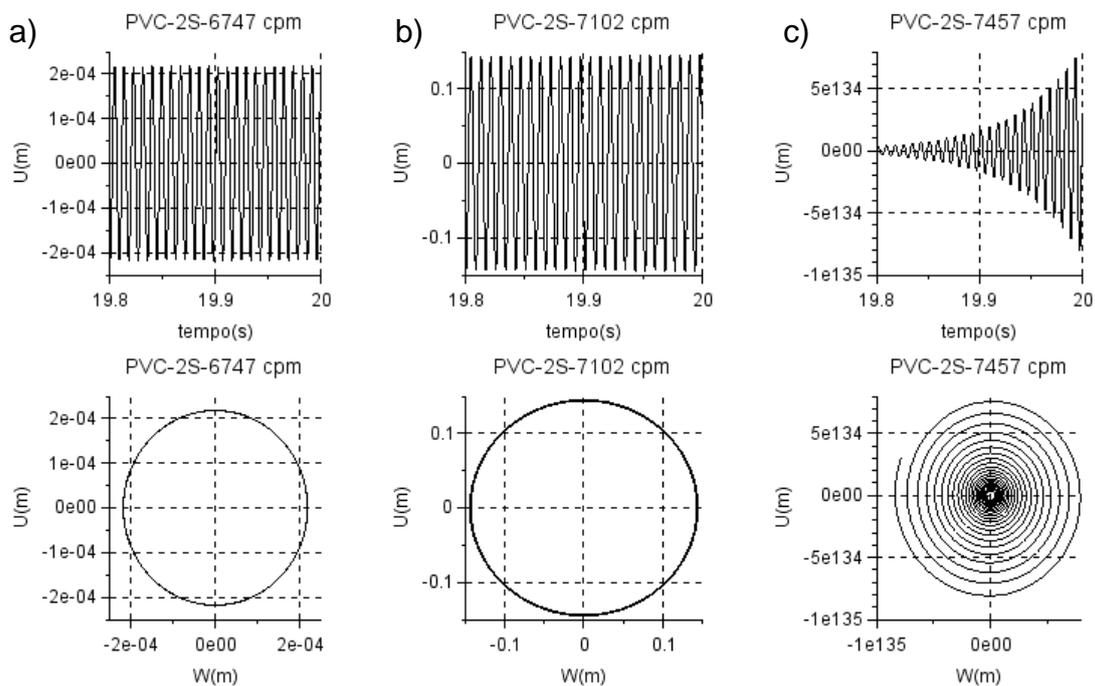


Figura 36 - Órbitas - Rotor em PVC endurecido - Modelo 2S - a) 5% abaixo da VLE, b) VLE, e c) 5% acima da VLE.



4.1.11 Rotor em PVC – Resumo

A aproximação das VLE's com diferenças relativas menores que 1,65 % em relação aos modelos de ROY (2016) valida os modelos 1C e 2C. Os modelos 1C e 2C passam a servir de referência para comparação com os modelos 1S e 2S.

O Quadro 2 resume de forma qualitativa as aproximações dos modelos “S” em relação aos modelos “C”. São comparados os modelos 1S x 1C e 2S x 2C:

Quadro 2 : PVC – Resumo qualitativo da aproximação dos parâmetros dos modelos “S” em relação aos modelos “C”

Parâmetro	Modelo	1C	2C
VLE	1S	Insatisfatória	-
	2S	-	Insatisfatória
UBR	1S	Satisfatória (até a VLE)	-
	2S	-	Satisfatória (até a VLE)
Velocidade Crítica	1S	Insatisfatória	-
	2S	-	Insatisfatória

Em relação ao rotor em PVC endurecido o Quadro 3 resume de forma qualitativa os resultados do modelo 2S em relação ao modelo 2C:

Quadro 3 : PVC endurecido – Resumo qualitativo da aproximação dos parâmetros do modelo 2S em relação ao modelo 2C

	2S	2C
VLE	<ul style="list-style-type: none"> • VLE=7102 RPM, igual à velocidade crítica • Maior sensibilidade ao aumento da rigidez do material do rotor 	<ul style="list-style-type: none"> • VLE = 333 RPM, menor que a 1ª velocidade crítica (554 RPM) • Menor sensibilidade ao aumento da rigidez do material do rotor
Campbell	<ul style="list-style-type: none"> • Linhas de precessão direta e precessão retrógrada se confundem 	<ul style="list-style-type: none"> • Ocorrência do fenômeno de “Curve Veering”
UBR	<ul style="list-style-type: none"> • Resposta ao desbalanceamento do modelo 2S idêntica à do modelo 2C até a velocidade de 109 RPM, abaixo da VLE do modelo 2C (333 RPM) 	
Velocidade crítica	Velocidades críticas dos dois modelos não se aproximam	

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram desenvolvidos dois modelos para prever o comportamento dinâmico de rotores operando em regime viscoelástico. O comportamento viscoelástico foi modelado partindo-se do método ADF e assim introduzido nas equações do movimento através de operadores diferenciais. Os modelos foram aplicados em rotores de alumínio e PVC e em seguida comparados com modelos de referência.

Para o alumínio, o modelo “S” mostrou ser aderente ao modelo histerético, o que não ocorreu com o modelo “C”.

Para o PVC, os resultados dos modelos “S” divergiram dos modelos usados como referência, podendo ser explorados em bancada numa continuação dessa pesquisa.

O grau de aproximação das soluções obtidas em relação às referências foram considerados satisfatórias, embora nem todos os modelos tenham convergido satisfatoriamente.

Para os modelos validados, o grau de simplificação adotado não permite realizar generalizações para modelos mais complexos, porém foi possível estabelecer algumas conclusões importantes:

- i) O grau de aproximação dos modelos satisfatoriamente aproximados permite utilizá-los em substituição ao modelo utilizado como referência;
- ii) Para o PVC, (ou outro polímero rígido), há pouca disponibilidade na literatura de resultados de ensaios viscoelásticos em frequências menores que 20 Hz. Vale ressaltar que a instabilidade inicia-se quando ocorre variação da velocidade de precessão em relação à velocidade de rotação do rotor. Assim, como os parâmetros viscoelásticos foram aproximados apenas a partir de 20 Hz, o módulo de elasticidade e o fator de perda na faixa de 0 a 20 Hz são calculados por extrapolação, o que pode não corresponder à realidade física. A questão central resume-se sobre qual a influência desses valores na determinação dos limites de estabilidade do rotor. Desconhecendo os reais valores destes parâmetros

nesta faixa de frequências, a única maneira de validar os resultados da simulação é a partir de experimentos com o rotor em bancada;

- iii) Para o alumínio, a comparação da simulação dos modelos ADF foi realizada em relação ao modelo histerético linear. Porém vale salientar que a suposição da linearidade somente é verdadeira se a velocidade de precessão for constante. Isso justifica a boa aproximação obtida com os modelos “1S” e “2S”. Uma investigação mais aprofundada, envolvendo ensaios experimentais em bancada pode ser proposta como estudo complementar, de forma a esclarecer quais valores de VLE’s que de fato ocorrem na prática.

5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se contribuir no âmbito de suporte tecnológico para a implementação de rotores em materiais poliméricos. Foi possível verificar que o assunto ainda é pouco explorado e não muito difundido academicamente, assim como a indústria também pode se beneficiar dos resultados da pesquisa nesse tema.

5.2 ATIVIDADES FUTURAS DE PESQUISA

- Desenvolver bancada experimental para a realização de ensaios dinâmicos em materiais poliméricos;
- Desenvolver bancada experimental para teste de rotores em materiais compósitos;
- Desenvolver aplicativo para o cálculo dos parâmetros dinâmicos de rotores em materiais viscoelásticos;
- Avaliar com mais profundidade as limitações dos modelos obtidos nessa pesquisa, avaliando o impacto das simplificações adotadas;
- Rever o estudo incluindo o efeito do cisalhamento, amortecimento externo e suportes viscoelásticos;

REFERÊNCIAS

HANSEN, David S. **Frequency-Dependent Material Damping Using Augmenting Thermodynamic Fields (ATF) with Fractional Time Derivatives**. Dissertação (Mestrado), AIR FORCE INST OF TECH WRIGHT-PATTERSON AFB OH SCHOOL OF ENGINEERING, 1990.

ROY, H.; DUTT, J. K. Dynamics of polymer and polymer composite rotors—An operator based finite element approach. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 3, p. 1754-1768, 2016.

ROY, H. et al. Dynamics of multilayer, multidisc viscoelastic rotor—An operator based higher order classical model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 369, p. 87-108, 2016.

SALDARRIAGA, Manuel Ramón Villafañe. **Atenuação de vibrações em máquinas rotativas flexíveis usando materiais viscoelásticos nos suportes**. Uberlândia, 2007. 103 p. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Uberlândia.

DE LIMA, Antonio Marcos G.; RODOVALHO, Luiz Fernando F.; BORGES, Romes A. Finite Element Modeling and Experiments of Systems with Viscoelastic Materials for Vibration Attenuation. In: **Viscoelastic and Viscoplastic Materials**. InTech, 2016.

ÖZGÜVEN, H. Nevzat; ÖZKAN, Z. L. Whirl speeds and unbalance response of multibearing rotors using finite elements. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, v. 106, p. 72-79, 1984.

COMBESCURE, D.; LAZARUS, A. Refined finite element modelling for the vibration analysis of large rotating machines: Application to the gas turbine modular helium reactor power conversion unit. **Journal of Sound and Vibration**, v. 318, n. 4, p. 1262-1280, 2008.

ROY, H.; DUTT, J. K.; DATTA, P. K. Dynamics of a viscoelastic rotor shaft using augmenting thermodynamic fields—a finite element approach. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 50, n. 4, p. 845-853, 2008.

FRISWELL, Michael I. et al. Time domain analysis of a viscoelastic rotor using internal variable models. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 52, n. 10, p. 1319-1324, 2010.

DUTT, J. K.; ROY, H. Viscoelastic modelling of rotor—shaft systems using an operator-based approach. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 225, n. 1, p. 73-87, 2011.

CHANDRAKER, S.; ROY, H.; MAURYA, G. Modal Analysis of Multi Layer Viscoelastic Rotors Considering Higher Order Model. In: **ASME 2013 Gas**

Turbine India Conference. American Society of Mechanical Engineers, 2013. p. V001T05A013-V001T05A013.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering**, 1998. John Wiley & Sons, p. 252.

MUSZYNSKA, Agnieszka. **Rotordynamics**. CRC press, 2005.

NELSON, F. C. **Rotor dynamics without equations**. International Journal of COMADEM, v. 10, n. 3, p. 2, 2007.

PEREIRA, José Carlos. **Introdução à Dinâmica de Rotores**. Lecture Notes, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, Florianópolis, Brasil, 2003.

GRAHAM, W. B. **Material damping and its role in linear dynamic equations**. University of Toronto, 1973.

VINCENT, Julian FV. **Structural biomaterials**. Princeton University Press, 2012.

MAINARDI, Francesco. Fractional calculus. **Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics**, p. 291-348, 1997.

BLANTER, Mikhail S. et al. **Internal friction in metallic materials**. A handbook Series: Springer Series in Materials Science, v. 90, p. 539, 2007.

KIMBALL, Arthur L. **Vibration prevention in engineering**, John Willey & Sons, Londres. 1932.

TermodinâmicaUFF. **Aula 2.16 - Entalpia e energia livre de Helmholtz**. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=lzp8fcypQxs>>. Acesso em: 22 jun. 2017.

CARFAGNI, Monica; LENZI, Edoardo; PIERINI, Marco. The loss factor as a measure of mechanical damping. In: **Proceedings-spie the international society for optical engineering**. SPIE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL, 1998. p. 580-284.

B.J. LAZAN, **Damping of Materials and Members in Structural Mechanics**, Pergamon Press, Oxford, 1968

ROY, H.; DUTT, J. K.; DATTA, P. K. Dynamics of multilayered viscoelastic beams. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 33, n. 4, p. 391-406, 2009.

ROY, H.; DUTT, J. K. Finite Element Modelling of Viscoelastic Rotors: An Operator Based Approach. 2010., India, **ICTACEM 2010 International Conference on Theoretical, Applied, Computational and Experimental Mechanics**, p. 27-29, 2010

SHAD, Muhammad Rizwan; MICHON, Guilhem; BERLIOZ, Alain. Modeling and analysis of nonlinear rotordynamics due to higher order deformations in bending. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 5, p. 2145-2159, 2011.

ROY, H.; CHANDRAKER, S. Dynamic study of viscoelastic rotor: Modal analysis of higher order model considering various asymmetries. **Mechanism and Machine Theory**, v. 109, p. 65-77, 2017.

DE AGUIAR, Marcus AM. **Tópicos de mecânica clássica**. Editora Livraria da Física, 2011.

ZHANG, J.; PEREZ, R. J.; LAVERNIA, E. J. Documentation of damping capacity of metallic, ceramic and metal-matrix composite materials. **Journal of Materials Science**, v. 28, n. 9, p. 2395-2404, 1993.

GONZE, A.; CHAUFFOUREAUX, J. C. A collaborative study of the dynamic mechanical and impact properties of PVC. **Pure and Applied Chemistry**, v. 35, n. 3, p. 315-352, 1973.

BANDEIRA, Carlos Filipe Cardoso. **Análise de fadiga multiaxial em elementos estruturais tubulares sujeitos à vibração forçada**. Rio de Janeiro, 2014. 121 p. Trabalho de conclusão de curso, CEFET/RJ.

APÊNDICE

Considerando um viga esbelta, com seção transversal de área A , momento de inércia de área I e massa específica ρ constantes ao longo do seu comprimento, composta de material isotrópico e submetida a excitação transversal externa na direção w e sem movimento de rotação, a equação de movimento, Eq. (A1), representa o equilíbrio dinâmico da viga para vibrações transversais livres. M é o momento fletor atuante na seção correspondente à posição y da viga. Uma dedução completa pode ser verificada em BANDEIRA (2014, pg. 15).

$$\frac{\partial M^2(y,t)}{\partial y^2} + \rho A \frac{\partial w^2(y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A1})$$

Para uma viga de Euler-Bernoulli, o momento fletor é representado na Eq. (A2). $E(\)$ é o módulo complexo de elasticidade, Eq. (19a), para o caso de material viscoelástico.

$$M(y,t) = E(\) I \frac{\partial w^2(y,t)}{\partial y^2} \quad (\text{A2})$$

Substituindo $E(\)$ na Eq.(A2) e a inserindo na Eq.(A1) obtemos a equação do movimento para vibrações livres amortecidas, Eq. (A3). Apóstrofes (') acima da função f representa a derivada em relação à direção y .

$$I \left[\sum_{k=0}^p n_k \frac{d^k}{dt^k} \right] w'''' + \rho A \left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \dot{w} = 0 \quad (\text{A3})$$

As duas condições de contorno cinemáticas

$$w(0,t) = 0,$$

$$w(L,t) = 0$$

E as $p+1$ condições de contorno estáticas devem ser satisfeitas

$$\begin{aligned}
w(y,0) &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial^p w(y,t)}{\partial t^p} \Big|_{t=0} &= v_p(y)
\end{aligned}$$

Na Eq. (A3), decompondo a variável do deslocamento transversal em $w(y,t) = f(y)W(t)$, a solução analítica exata é obtida pelo método da separação de variáveis, através da resolução da Eq. (A4), reescrita na forma da Eq. (A5).

$$I \left[\sum_{k=0}^p n_k \frac{d^k}{dt^k} \right] W f'''' + \rho A \left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \ddot{W} f = 0 \quad (\text{A4})$$

$$\left(\frac{I}{\rho A} \right) \frac{f''''}{f} = - \frac{\left[\sum_{k=0}^p m_k \frac{d^k}{dt^k} \right] \ddot{W}}{\left[\sum_{k=0}^p n_k \frac{d^k}{dt^k} \right] W} = C \quad C \in \mathfrak{R}^* \quad (\text{A5})$$

A solução geral da parte espacial (função f) da Eq. (A5) é dada pela Eq. (A6) com $d > 0$ e F_1, G_1, F_2 e $G_2 \in \mathfrak{R}$, BANDEIRA (2014, pg. 17). A solução particular $f(y) = \text{sen}(\pi y/L)$ está contida na solução geral, representando o 1º modo de deformação da viga.

$$f(y) = F_1 \cos(dy) + G_1 \text{sen}(dy) + F_2 \cosh(dy) + G_2 \text{senh}(dy) \quad (\text{A6})$$

ANEXO

O Gráfico 1 apresenta o grau de ajuste das funções de transferência dos modelos “S” e “C” em relação à função de transferência do modelo hysterético. A aproximação foi obtida utilizando algoritmo genético da ferramenta SOLVER, do Microsoft Excel.

Gráfico 1 – Aproximação das funções de transferência dos modelos ADF em relação ao modelo hysterético

