

## UMA PROPOSTA DE MODELAGEM DA INFLUÊNCIA DO CABO GUIA NA DETERMINAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE FOGUETES DE GARRAFA PET PRESSURIZADA

**Marcelo E. C. de Carvalho<sup>1</sup>, Carlito B. Marques Neto<sup>1</sup>, Matheus B. Duailibe<sup>1</sup>, Fábio A. Lora<sup>1</sup>, Guilherme O. Souza<sup>1</sup>, Melina, S. Lima<sup>1</sup>, José V. C. Santos<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC, E-mail: mec.espinheira@gmail.com; carlitoobessa@gmail.com; duailibe23@gmail.com; lora@fieb.org.br; guilhermeos@fieb.org.br; melina.lima@fieb.org.br; vicente.cardoso@fieb.org.br.

### RESUMO

*Durante o estudo da física e mecânica, diversas instituições de ensino superior utilizam-se do projeto do foguete de garrafa PET como recurso para o aprendizado do movimento balístico. O objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento de uma modelagem matemática capaz de prever com uma boa precisão a posição do foguete ao longo da trajetória, para que seja possível o transporte de um cabo guia de aço em direção a um alvo definido. Para o desenvolvimento deste trabalho foi realizada uma medição do terreno utilizado como referência, além de uma revisão bibliográfica lastrada nas equações da física mecânica, e utilizando o Excel 2010 e outros softwares para elaborar uma modelagem matemática capaz de descrever a trajetória balística de foguetes de garrafas PET. Com os dados de entrada e utilizando a planilha, encontrou-se um ângulo de lançamento para que o foguete acertasse o alvo determinado. Em seguida foram realizados lançamentos com este ângulo e observou-se que 71,43% das vezes o foguete acertou, enquanto 28,57% das vezes que não foram obtidos êxito. Estes valores apresentam a eficácia da modelagem, visto que mesmo sem consideração de variáveis não mensuráveis como a variação da velocidade do vento, obteve-se um resultado promissor. Por fim, os autores registraram todo o processo como uma eficaz adoção de integração de conhecimentos de cunho interdisciplinar e de formação integradora singular.*

**Palavras - Chaves:** Foguete de garrafa PET; Lançamento de projétil; Modelagem Matemática.

## ABSTRACT

*During the study of mechanical physics, several institutions of higher education are used PET bottle rocket design as a resource for learning ballistic movement. The objective of this study is to develop a mathematical model able to predict with good accuracy the rocket position along the path, so you can carry a steel cable guide toward a defined target. To develop this work, was held a measurement of the land used as a reference, and literature review based in mechanical equations with the use of Excel 2010 software and others to prepare this mathematical model able to describe the trajectory of bottle rockets PET. With the input data and using a spreadsheet, met a launch angle so that the rocket hit him the intended target. Then, were carried out with this angle and it was found that 71.43% of the time the rocket hit the target, while 28.57% of the time were not successfully obtained. These figures show the effectiveness of the modeling, since even without consideration of non-measurable variables as the speed variation of wind, there was obtained promising results. Finally, the authors recorded the whole process as an effective adoption of integrated interdisciplinary nature of knowledge and unique integrative training.*

**Keywords:** *Water Rocket Launcher; Projectile Launcher; Mathematical Modeling.*

## 1. INTRODUÇÃO

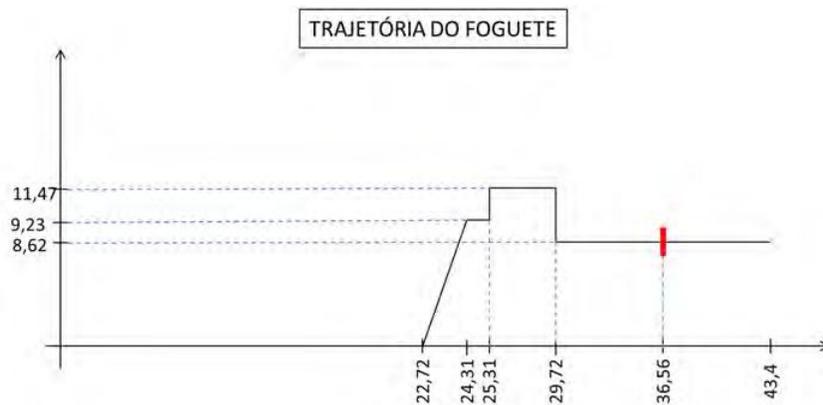
Na disciplina de física mecânica, apresentada aos alunos de ensino médio e superior em física e nas engenharias, conceitos relativos ao movimento bidimensional são explorados com o estudo do movimento balístico. Para a consolidação do aprendizado adquirido com as aulas teóricas, os alunos realizam experimentos práticos com objetivo de observar e analisar os fenômenos físicos estudados.

O uso de foguetes de garrafa PET vem sendo largamente utilizado nas mais diversas universidades do país como parte do ensino de física mecânica, e neste contexto alguns alunos acabam por se aprofundar na análise dos fenômenos observados buscando uma modelagem matemática que satisfaça ao conjunto de variáveis envolvidas no lançamento vertical do projétil [1, 2]. Durante a pesquisa na literatura acadêmica não foram encontrados estudos que busquem a criação de modelo matemático específico para a análise da trajetória balística do foguete de garrafa PET, além disso, poucos estudos buscam uma aplicação prática para o lançamento do mesmo, sendo esta uma tecnologia de baixo custo e que se utiliza de materiais recicláveis, o que justificaria a sua utilização em possíveis propostas.

Desta forma, o presente trabalho tem por objetivo a elaboração de uma modelagem matemática capaz de descrever a trajetória balística desenvolvida por um foguete de garrafa PET lançado em direção a um alvo determinado, levando consigo um cabo guia de aço de 1/16", que serviria de apoio ao transporte de cabos de tensão de rede elétrica e outros dispositivos em regiões de difícil acesso. A modelagem precisaria ainda ser capaz de definir o melhor ângulo de lançamento, assim como ilustrar de forma gráfica toda a trajetória desde o disparo até atingir o alvo em um sistema de coordenadas bidimensionais.

## 2. METODOLOGIA

Para construção da modelagem inicialmente foram coletadas as dimensões do território de lançamento, buscando conhecer as reais distâncias entre o ponto de saída do foguete e o alvo determinado, assim como todos os obstáculos presentes, a Figura 1 ilustra o esquema da trajetória. O método utilizado para confecção do foguete se baseia no artigo publicado por Souza em 2007 [1], onde é possível encontrar as especificações para determinação geométrica estrutural de forma a garantir a sua estabilidade durante o voo.

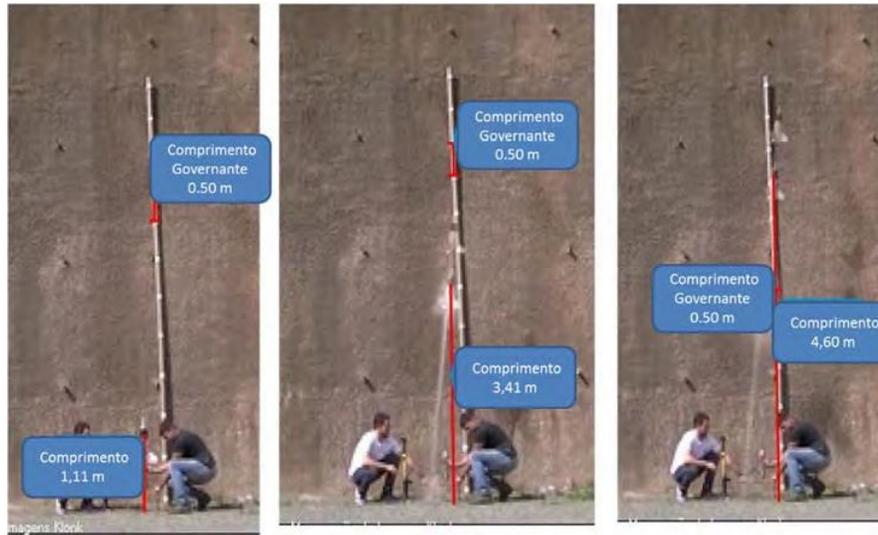


**Figura 1** - Esquema simplificado do terreno de lançamento do foguete. Fonte: Autores.

Neste esquema, a marcação em vermelho determina o centro do alvo ao qual o foguete tem que acertar e os valores de 29,72m e 43,4m representam os limites do alvo.

Para a realização da modelagem matemática foi necessário obter alguns dados prévios como, velocidade inicial no instante após a ejeção total da água, gravidade do local onde foram realizados os lançamentos (disponibilizado pelo Laboratório de Metrologia do SENAI CIMATEC), massa do foguete, pressão interna do foguete pressurizado (obtido pelo manômetro do compressor manual utilizado), valor do coeficiente de arrasto e o tempo de ejeção. Alguns destes dados, como a velocidade inicial do foguete e tempo de ejeção foram extraídos de lançamentos verticais realizados no local estacionamento do SENAI CIMATEC. Para a determinação do instante em que o foguete ejetou toda a água e da respectiva altura, foi realizada uma análise do vídeo utilizando o *Software VirtualDub 1.3c (portable)* onde foi observando cada *frame* (quadro) para encontrar o ponto final de ejeção da água e tempo para ejeção total. Após observar os frames, o instante de ejeção total da água foi capturado e utilizando o *software KLNK Image Measurement*, versão 14.2.1, que se utiliza de uma medida referencial da imagem, neste caso as marcações metro a metro no tubo posicionado no paredão, obtendo-se a medida desejada, como pode ser visto na Figura 2.

10 e 11 de setembro de 2015 / Salvador, Bahia, Brasil



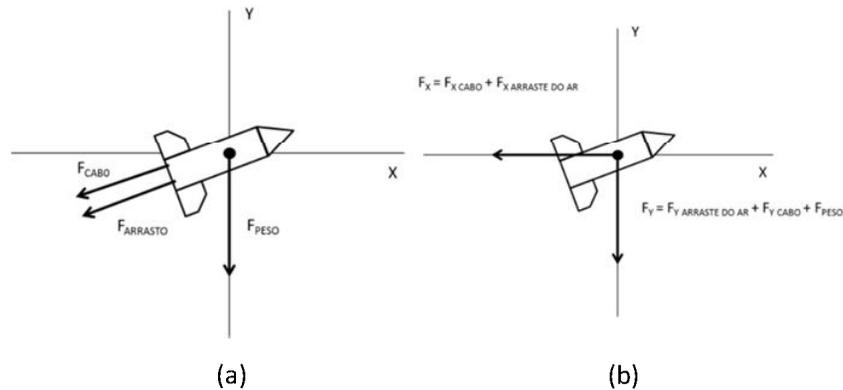
**Figura 2** - Medição da posição do foguete e a referência utilizada para esta medição.  
Fonte: Autores.

Utilizando a Equação 1 [3], foi possível determinar o velocidade máxima ou inicial do foguete ( $\Delta V$ ), onde  $\Delta S$  foi o deslocamento do foguete no instante após a ejeção total da água e  $\Delta t$  o tempo de um frame para o outro obtido pelo *software* VirtualDub 1.3c (Portable).

$$\Delta V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (1)$$

Após a determinação da velocidade e deslocamento iniciais do foguete foi realizada uma decomposição do deslocamento nos eixos  $x$  e  $y$  do sistema de coordenadas utilizado, tendo como objetivo determinar o ponto de partida para a análise de discretização. Esta determinação foi necessária visando desconsiderar a análise do deslocamento do foguete no intervalo de tempo relacionado à propulsão devido às dificuldades de prever com exatidão o comportamento do projétil neste intervalo, tendo o movimento aceleração variável do disparo até a total ejeção da água, após este ponto o movimento foi considerado com desacelerado nos eixos verticais e horizontais devido a atuação da força da gravidade, arrasto do ar e da tração do cabo.

Para a análise do comportamento do foguete foi definido um intervalo de tempo de 0,01 segundos, onde de um tempo para o seguinte o deslocamento foi resultado da ação das forças envolvidas. A Figura 3-a ilustra o diagrama das forças de desaceleração do foguete, que foram decompostas de acordo a sua atuação a cada instante em forças horizontais e verticais, como ilustrado na Figura 3-b.



**Figura 3**– (a) -Foguete e as forças atuantes durante o movimento; (b) - Decomposição das forças no foguete nos eixos x e y. (Fonte: Autores.)

Para determinação da força de arrasto no descolamento do foguete foi utilizada a Equação 2, onde  $C_d$  corresponde ao coeficiente de arrasto,  $\rho$  a massa específica do ar,  $V$  a velocidade do projétil e  $d$  o diâmetro da seção do foguete. O valor do coeficiente de arrasto utilizado foi baseado no trabalho desenvolvido por Xavier [4], com valor médio encontrado de 1,04 para um foguete com dimensões similares ao utilizado no presente trabalho.

$$D = \frac{\pi C_d \rho V^2 d^2}{8} \quad (2)$$

A força de arrasto foi decomposta nos eixos x e y, assim, para encontrar o valor no eixo y deverá multiplicar este valor pelo cosseno do ângulo formado entre a componente de arrasto e a sua decomposta  $D_y$  e o mesmo foi calculado para o eixo x, alterando somente o cosseno pelo seno do ângulo.

A força peso, apresentada na Equação 3 [5], onde  $m$  representa a massa e  $g$  a gravidade, é uma força constante, pois a massa do foguete, após a ejeção total da água não varia com o tempo.

$$F_p = m \cdot g \quad (3)$$

Partimos do pressuposto que a tração exercida pelo cabo nas frações de tempo analisadas está diretamente relacionada à taxa de ganho de cabo ao longo da trajetória. Assim, a Equação 4 [3] ilustra o método utilizado para o cálculo de ganho de massa de cabo a cada instante relacionado ao deslocamento do foguete neste intervalo de tempo, multiplicado pela densidade linear do cabo (sendo esta calculada pela medição direta de um fragmento do cabo utilizando um paquímetro e uma balança semi analítica).

$$M_{cabo} = \sqrt{(\Delta x^2) + (\Delta y^2)} \cdot d \quad (4)$$

A partir da massa de cabo calculada e, utilizando a Equação 5 [3], foi possível encontrar a força de tração que o cabo exerce. Lembrando que, da mesma forma que a força de arraste, a

10 e 11 de setembro de 2015 / Salvador, Bahia, Brasil

força de tração também foi decomposta no eixo x e eixo y e o como o sentido da força de arraste é o mesmo da força de tração, que é contra o movimento, para encontrar o valor da força de tração na componente y basta multiplicar pelo cosseno do ângulo e para o eixo x multiplicar pelo seno.

$$F_C = m_{cabo} \cdot g \quad (5)$$

Ao determinar estes cálculos, poderá se encontrar a velocidade do foguete tanto em x ( $V_x$ ) quanto em y ( $V_y$ ) utilizando o cálculo do momento. O momento foi calculado tanto para o eixo x quanto para o eixo y, afinal as forças atuantes encontram-se nos 2 eixos. A seguir, a Equação 6 [3] apresenta o cálculo da variação do momento linear para as componentes x e y entre dois instantes em um intervalo de tempo de 0,01 segundos, onde F é a força resultante,  $\Delta M$  a variação de momento linear,  $\Delta t$  a variação de tempo, m a massa do foguete,  $V_1$  a velocidade antes e  $V_2$  a velocidade após a desaceleração resultante das forças.

$$F = \frac{\Delta M}{\Delta t} \rightarrow \Delta M = F \cdot \Delta t \rightarrow mV_1 - mV_2 = F \cdot \Delta t \quad (6)$$

A partir do cálculo de momento linear foi possível prever a variação de velocidade do foguete nas componentes x e y entre dois pontos no intervalo de tempo analisado, e assim desenvolver os cálculos necessários para determinar a posição do projétil em um sistema de coordenadas bidimensionais após o mesmo intervalo de tempo. Utilizando a Equação 7 [3], onde o deslocamento (S) é igual ao deslocamento inicial ( $S_0$ ) somando à velocidade no instante (v) multiplicada pelo tempo (t) e desprezando a aceleração na análise do deslocamento, pode-se determinar a posição final do projétil utilizando para tal os valores das componentes das velocidades em x e em y no instante inicial.

$$S = S_0 + vt \quad (7)$$

O processo de discretização acontece utilizando, como descrito anteriormente, os dados referentes a velocidade do foguete em um instante e o seu deslocamento resultante. A velocidade no instante seguinte é calculada com base nas forças responsáveis pela desaceleração do projétil (arrasto, gravidade e massa do cabo) que variam em cada intervalo de tempo de forma interligada.

Para a elaboração da planilha foi utilizado o *software* Excel 2010, onde inicialmente foi definida uma coluna com o intervalo de tempo para análise definido anteriormente e então as demais colunas receberam os registros das posições relativas ao sistema de coordenadas e as suas respectivas velocidades em cada componente, os momentos lineares em cada componente, a força de arrasto e tração do cabo em cada instante. As células foram preenchidas com as fórmulas no formato do programa para o cálculo dos valores absolutos de forma a interrelacionar as variáveis descritas e finalmente permitir a representação gráfica da trajetória do foguete dentro de um desenho esquemático da mesma. Variando o ângulo de lançamento na planilha era possível prever a posição do foguete ao final da trajetória e prever se o mesmo atingiria o alvo ou não.

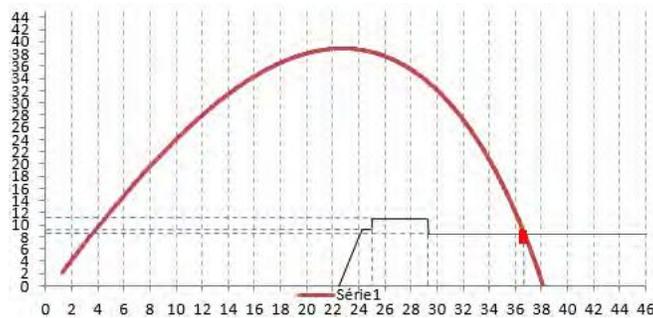
Para verificar a eficácia da modelagem foram realizados 14 lançamentos com foguetes de mesma dimensão e massas. O alvo definido foi uma estrutura circular localizada em um nível

10 e 11 de setembro de 2015 / Salvador, Bahia, Brasil

superior ao estacionamento inferior do SENAI CIMATEC, como pode ser identificado na Figura 6, que apresenta um raio de 6,84 metros. Visando melhorar a interpretação dos resultados esta região foi dividida esquematicamente em três zonas circulares, sendo a Zona 1 a região mais interna com raio de 2,28 metros, a Zona 2 com limite superior de 4,56 metros e a Zona 3 com limite em 6,84 metros.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

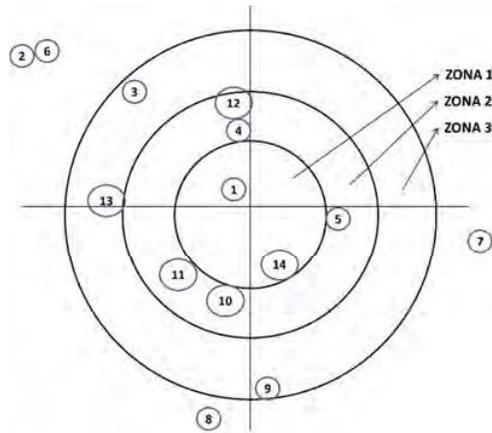
A planilha desenvolvida, como descrita anteriormente, permitiu a construção de um gráfico a partir dos dados do deslocamento vertical e horizontal, como ilustrado na Figura 15. Este gráfico funciona de forma dinâmica dentro da planilha, onde alterando o ângulo de lançamento é possível observar o novo local atingido pelo foguete, sendo possível realizar correções devido à possível mudança de massa de projétil, mudança de densidade do cabo guia e alteração do valor da velocidade inicial (variando a pressão de lançamento).



**Figura 15** - Gráfico que simula o percurso do foguete no local de lançamento.  
Fonte: Autores.

Ao final dos lançamentos e registro dos mesmos no histograma descrito anteriormente, ilustrados com os disparos na Figura 16, foi possível avaliar a precisão e a exatidão dos lançamentos. A pressão utilizada em cada lançamento, como previamente descrito, foi fixada em 80 Psi e os ângulos variaram entre 73 - 75° (medidos com auxílio do aplicativo Smart Protractor, disponível para Android).

10 e 11 de setembro de 2015 / Salvador, Bahia, Brasil



**Figura 16** - Representação dos resultados dos 14 lançamentos executados.

Fonte: Autores.

Diante dos resultados é possível observar que dos 14 lançamentos realizados, dois (14,28%) atingiram a Zona 1, cinco (35,71%) atingiram a Zona 2, três (21,43%) atingiram a Zona 3 e quatro (28,57%) não atingiram o alvo. Logo, 71,43% dos lançamentos atingiram o alvo, contra 28,57% que não o atingiram.

Os trabalhos analisando o comportamento de foguetes de garrafa PET buscam desenvolver e validar uma modelagem matemática capaz de prever a altura máxima do projétil após o lançamento vertical levando em considerações variáveis relacionadas ao fluido, a taxa de variação de massa do foguete e arrasto do ar [1, 2]. Não foram encontrados, na bibliografia pesquisada, trabalhos que tenham desenvolvido uma modelagem específica para lançamento balístico.

Foi realizada uma tentativa de análise da altura de lançamento vertical do foguete com metodologia similar ao trabalho de Oliveira e Brito [2], utilizando um dispositivo medidor de ângulo similar ao descrito na site da NASA [6]. O objetivo realizar uma comparação com os dados estimados com a modelagem em um disparo a  $90^\circ$  (lançamento vertical), porém os resultados obtidos com o astrolábio não foram confiáveis, sendo então descartados e buscando a constatação da eficácia do modelo matemático no lançamento balístico proposto.

#### 4. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos no presente trabalho permitem inferir que a modelagem descrita apresenta uma boa capacidade de prever a trajetória do foguete evidenciado pela precisão razoável dos 14 lançamentos realizados com um foguete de garrafa PET pressurizada a 80 Psi, levando em consideração as limitações da análise bidimensional e a exclusão das variações de velocidade do vento durante os lançamentos. Além disto, é importante salientar que não foi possível verificar a altura máxima que o foguete atingiu, desta forma não há como garantir que o foguete percorreu exatamente a trajetória prevista pela modelagem, apesar do desfecho favorável.

## REFERÊNCIAS

- <sup>1</sup> SOUZA, J.A.. Um Foguete de Garrafas PET. Física na Escola, v. 8, n. 2, 2007.
- <sup>2</sup> OLIVEIRA, M. A. S.; BRITO, P. E.. Os Aspectos Físicos e Matemáticos do Lançamento do Foguete de Garrafa PET. Universidade Católica de Brasília. Brasília, 2008.
- <sup>3</sup> HALLIDAY, D.; RESNICK, R. WALKER, J. Fundamentos de Física. 3ª Ed. Vol.3, Rio de Janeiro. Livros Técnicos e Científicos, 2002.
- <sup>4</sup> XAVIER, A.P. Uso do Foguete de Água no Ensino de Hidrodinâmica em Física Geral. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2012.
- <sup>5</sup> TIPLER, P. A.; MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica. 6. Ed. Vol.1, Rio de Janeiro. LTC, 2008.
- <sup>6</sup> NASA. Rocket Thrust Equation. Disponível em: < <http://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/rockth.html>>, Acesso: 18/11/2014.