



**FACULDADE DE TECNOLOGIA SENAI CIMATEC**  
**ESPECIALIZAÇÃO EM AUTOMAÇÃO E CONTROLE**

**RAFAEL MEIRELES SABACK**

**APLICAÇÃO DE CONTROLADOR ADAPTATIVO BASEADO NA TEORIA DE  
LYAPUNOV E CONTROLADOR PI EM VEÍCULO SUBMARINO SUJEITO À  
PERTURBAÇÃO DE CORRENTES MARÍTIMAS VARIÁVEIS**

Salvador

**2014**

**RAFAEL MEIRELES SABACK**

**APLICAÇÃO DE CONTROLADOR ADAPTATIVO BASEADO NA TEORIA DE  
LYAPUNOV E CONTROLADOR PI EM VEÍCULO SUBMARINO SUJEITO À  
PERTURBAÇÃO DE CORRENTES MARÍTIMAS VARIÁVEIS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Especialização em Automação e Controle da Faculdade de Tecnologia SENAI Cimatec como requisito final para obtenção do título de Especialista.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Ma. Juliana Teixeira Pains Oliveira

Salvador

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC

S113a Saback, Rafael Meireles

Aplicação de controlador adaptativo baseado na teoria de Lyapunov e controlador PI em veículo submarino sujeito à perturbação de correntes marítimas variáveis / Rafael Meireles Saback – Salvador, 2014.

102 p. : il. color.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Ma. Juliana Teixeira Pains Oliveira.

Monografia (Especialização em Automação e Controle) – Programa de Pós-Graduação, Faculdade de Tecnologia Senai - CIMATEC, Salvador, 2014.

Inclui referências bibliográficas.

1. Veículo submarino. 2. Teoria Lyapunov. 3. Controlador PI. 4. Controlador adaptativo. 5. Correntes marítimas – Perturbações. I. Faculdade de Tecnologia Senai – CIMATEC. II. Oliveira, Juliana Teixeira Pains. III. Título.

CDD: 629.045

RAFAEL MEIRELES SABACK

APLICAÇÃO DE CONTROLADOR ADAPTATIVO BASEADO NA TEORIA DE  
LYAPUNOV E CONTROLADOR PI EM VEÍCULO SUBMARINO SUJEITO À  
PERTURBAÇÃO DE CORRENTES MARÍTIMAS VARIÁVEIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito final para obtenção do título de Especialista em Automação e Controle, Faculdade SENAI Cimatec.

Aprovado em 10 de Junho de 2014.

**Banca Examinadora**

---

Profª. Ma. Juliana Teixeira Pains Oliveira – Orientadora  
Mestra pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
São José dos Campos, Brasil  
Faculdade de Tecnologia SENAI Cimatec

---

Prof. Me. Marcelo Henrique Souza Bomfim  
Mestre pela Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, Brasil  
Faculdade de Tecnologia SENAI Cimatec

---

Prof. Dr. Tito Luis Maia Santos  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina  
Floorianópolis, Brasil  
Universidade Federal da Bahia

10 de Junho de 2014

“A frase mais excitante que se pode ouvir na ciência,  
aquela que marca o maior número de descobertas,  
não é 'Eureka!', e sim 'Engraçado...!' ”

Isaac Asimov

## RESUMO

Veículos submarinos não tripulados operam em um ambiente caracterizado por sua dinâmica complexa e inúmeras perturbações existentes. A operação em um ambiente heterogêneo como este requer sistemas de controle eficazes que permitam ao veículo seguir a referência desejada, ainda que esteja sujeito à influência de perturbações externas. Neste contexto, este trabalho apresenta a comparação entre uma lei de controle adaptativa baseada na teoria de estabilidade de *Lyapunov* e um controlador PI, ambos aplicados ao controle de movimento de um veículo submarino não tripulado sujeito à perturbação. Este trabalho considerou a perturbação causada pelas correntes marítimas enquanto o veículo está seguindo um determinado vetor de referência de velocidade. O objetivo é comparar o desempenho de ambos os controladores em cenários idênticos, considerando-se diferentes vetores de referência e a interferência das correntes oceânicas. Os resultados aqui apresentados são apenas simulações e a modelagem do veículo considerou publicações técnicas existentes, já que não se dispunha de um protótipo físico para experimentos em alto mar. Ainda assim, este estudo fornece uma base satisfatória sobre o controle de veículos submarinos não tripulados sujeitos à perturbação de correntes marítimas.

**Palavras-chave:** veículo submarino, teoria *Lyapunov*, controlador PI, controlador adaptativo, correntes marítimas – perturbações.

## ABSTRACT

Unmanned underwater vehicles operate in an environment characterized by its complex dynamics and numerous disturbances. The operation in a heterogeneous environment like this requires effective control systems that allow the vehicle to follow the desired reference vector even if it's subject to the influence of external disturbances. In this context, this paper presents the comparison between an adaptive control law based on Lyapunov's stability theory and a PI controller, both applied to the motion control of an unmanned underwater vehicle subject to disturbances. This work has considered disturbances caused by ocean currents while the vehicle is following a determined velocity reference vector. The objective is to compare the performance of both controllers in identical scenarios, considering different reference vectors and the interference of ocean currents. The presented results are simulation-based and its modeling has considered technical publications since there wasn't a physical prototype available for sea experiments. Nevertheless, this study provides a great foundation in unmanned underwater vehicles' control subject to ocean currents.

**Key-words:** underwater vehicle, Lyapunov theory, PI controller, adaptive controller, ocean currents – disturbances.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 - Esferoide prolato. ....	20
Figura 2-2 - Dimensões das aletas (plano XY). ....	21
Figura 2-3 - Visão traseira do veículo (plano XZ) ....	22
Figura 2-4 - Parâmetros de área do veículo submarino. ....	22
Figura 2-5 - Coordenadas das aletas. ....	22
Figura 2-6 - Parâmetros para o cálculo de <i>rmean</i> . ....	23
Figura 2-7 - Sistemas de coordenadas do veículo submarino (FOSSEN, 1994). ....	25
Figura 2-8 - Coeficiente de fricção superficial em função do número de <i>Reynolds</i> (LEWIS, 1988). ....	39
Figura 2-9 - Ilustração do cálculo do arrasto cruzado do casco. ....	42
Figura 4-1 - Malha de controle do veículo submarino. ....	50
Figura 4-2 - Alocação de controle. ....	51
Figura 4-3 - Curvas não lineares do coeficiente de propulsão (FOSSEN, 1994). ....	52
Figura 4-4 - Deslocamento com velocidade e força propulsora positivas (Adaptado de FOSSEN, 1994). ....	52
Figura 4-5 - Coeficiente de propulsão versus número de avanço (Adaptado de FOSSEN, 1991). ....	53
Figura 4-6 - Ilustração do ângulo $\delta_r$ (adaptada de PRESTERO, 2001). ....	55
Figura 4-7 - Ilustração do ângulo $\delta_s$ (adaptada de PRESTERO, 2001). ....	55
Figura 5-1 - Malha de controle do sistema completo. ....	63
Figura 5-2 - Referências de velocidade em <i>surge</i> e <i>yaw</i> para uma trajetória em “S”. ...	63
Figura 5-3 - Saturação inicial e conseqüente sobressalto do sinal de <i>surge</i> . ....	64
Figura 5-4 - Nova referência em <i>surge</i> . ....	65
Figura 5-5 - Controlador adaptativo baseado na teoria de <i>Lyapunov</i> . ....	65
Figura 5-6 - Cálculo do vetor de forças e momentos desejados ( $\tau V$ ). ....	66

Figura 5-7 - Controlador PI.....	67
Figura 5-8 – Sobressaltos iniciais: (I) Sinal de controle adaptativo (II) Sinal de controle PI.....	67
Figura 5-9 – Ruído no sinal de controle PI.....	68
Figura 5-10 - Modelo matemático do veículo submarino.....	69
Figura 5-11 - Direção da corrente.....	70
Figura 5-12 - Gerador de correntes marítimas.....	71
Figura 5-13 - Componentes da corrente marítima.....	72
Figura 5-14 - Campo vetorial da corrente marítima no plano XY.....	72
Figura 6-1 - Referência de velocidade para trajetória em "S".....	74
Figura 6-2 – Trajetória em “S” percorrida pela referência de velocidades.....	74
Figura 6-3 - Referência de velocidade para trajetória espiral.....	75
Figura 6-4 – Trajetória em espiral percorrida pela referência de velocidades.....	75
Figura 6-5 - Trajetória percorrida em "S".....	76
Figura 6-6 - Velocidade em <i>surge</i> para a trajetória em “S”.....	76
Figura 6-7 - Velocidade em <i>yaw</i> para a trajetória em “S”.....	77
Figura 6-8 - Trajetória percorrida em espiral.....	77
Figura 6-9 - Velocidade em <i>surge</i> para a trajetória em espiral.....	78
Figura 6-10 - Velocidade em <i>yaw</i> para a trajetória em espiral.....	78
Figura 6-11 - Sinais de controle para a trajetória em "S".....	79
Figura 6-12 - Sinais de controle para a trajetória espiral.....	80
Figura 6-13 - Trajetória percorrida em "S".....	81
Figura 6-14 - Velocidade em <i>surge</i> para a trajetória em "S".....	81
Figura 6-15 - Velocidade em <i>yaw</i> para a trajetória em "S".....	81
Figura 6-16 - Trajetória percorrida em espiral.....	82
Figura 6-17 - Velocidade em <i>surge</i> para a trajetória em espiral.....	82

Figura 6-18 - Velocidade em <i>yaw</i> para a trajetória em espiral.....	83
Figura 6-19 - Sinais de controle para a trajetória em "S".....	84
Figura 6-20 - Sinais de controle para a trajetória em espiral.....	85
Figura 6-21 - Trajetória percorrida em "S".....	86
Figura 6-22 - Velocidade em <i>surge</i> para a trajetória em "S".....	86
Figura 6-23 - Velocidade em <i>yaw</i> para a trajetória em "S".....	86
Figura 6-24 - Trajetória percorrida em espiral.....	87
Figura 6-25 - Velocidade em <i>surge</i> para a trajetória em espiral.....	87
Figura 6-26 - Velocidade em <i>yaw</i> para a trajetória em espiral.....	88
Figura 6-27 - Sinais de controle para a trajetória em "S".....	89
Figura 6-28 - Sinais de controle para a trajetória em espiral.....	89
Figura I - Projeção ortogonal de vetores.....	98
Figura II - Ilustração da classificação de sistemas lineares para um par de retas. ....	101

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Notação utilizada para os 6 graus de liberdade.....	19
Tabela 2.2 - Dimensões principais do veículo submarino. ....	21
Tabela 2.3 - Parâmetros do veículo submarino. ....	23
Tabela 2.4 - Variáveis associadas às forças peso e empuxo. ....	25
Tabela 2.5 - Momentos de inércia. ....	35
Tabela 2.6 - Derivativos hidrodinâmicos de 1ª ordem.....	38
Tabela 2.7 - Coeficientes associados à fricção superficial e ao arrasto axial.....	41
Tabela 2.8 - Derivativos hidrodinâmicos de 2ª ordem.....	44
Tabela 4.1 – Parâmetros associados à dinâmica do propulsor. ....	54
Tabela 4.2 – Parâmetros associados à dinâmica das aletas. ....	56
Tabela 4.3 - Coeficientes para controle das aletas.....	57
Tabela 4.4 - Coeficientes que relacionam forças/momentos reais e virtuais. ....	62
Tabela 6.1 - Métrica de erro quadrático para o caso sem perturbações.....	78
Tabela 6.2 - Métrica de erro quadrático para o caso com perturbações. ....	83
Tabela 6.3 - Métrica de erro quadrático.....	88

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AUV	<i>Autonomous Underwater Vehicle</i>
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
RB	<i>Rigid Body</i>
ROV	<i>Remotely Operated Vehicle</i>
SNAME	<i>The Society of Naval Architects and Marine Engineers</i>
UUV	<i>Unmanned Underwater Vehicle</i>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
1.1	MOTIVAÇÃO.....	14
1.2	PESQUISA BIBLIOGRÁFICA .....	14
1.3	PROPOSTA DE TRABALHO .....	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	17
<b>2</b>	<b>MODELO FENOMENOLÓGICO .....</b>	<b>18</b>
2.1	NOTAÇÃO UTILIZADA.....	18
2.2	O VEÍCULO SUBMARINO .....	20
2.2.1	DIMENSÕES PRINCIPAIS .....	20
2.2.2	DIMENSÕES DAS ALETAS.....	21
2.2.3	PREMISSAS CONSIDERADAS.....	23
2.3	SISTEMA DE COORDENADAS.....	25
2.4	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO PARA 6-DOF .....	27
2.5	FORÇAS E MOMENTOS HIDRODINÂMICOS .....	29
2.5.1	SUBPROBLEMA 1 - FORÇAS INDUZIDAS POR RADIAÇÃO .....	29
2.5.2	SUBPROBLEMA 2 - FROUDE-KRILOFF E FORÇAS DE DIFRAÇÃO ....	30
2.5.3	MATRIZ DE INÉRCIA ADICIONADA .....	31
2.5.4	MATRIZ CORIOLIS CENTRÍPETA ADICIONADA.....	32
2.5.5	AMORTECIMENTO HIDRODINÂMICO.....	33
2.5.6	FORÇAS E MOMENTOS RESTAURADORES .....	34
2.6	CÁLCULO DE PARÂMETROS .....	34
2.6.1	MOMENTOS DE INÉRCIA.....	34
2.6.2	DERIVATIVOS HIDRODINÂMICOS DE 1ª ORDEM.....	35

2.6.3	DERIVATIVOS HIDRODINÂMICOS DE 2ª ORDEM.....	38
2.7	PROPRIEDADES IMPORTANTES DO MODELO.....	44
<b>3</b>	<b>ESTABILIDADE DE LYAPUNOV.....</b>	<b>45</b>
3.1	SISTEMAS AUTÔNOMOS.....	45
3.2	SISTEMAS NÃO-AUTÔNOMOS.....	46
3.3	ESTABILIDADE DE VEÍCULOS SUBMARINOS.....	47
<b>4</b>	<b>MALHA DE CONTROLE.....</b>	<b>50</b>
4.1.1	DINÂMICA DOS ATUADORES.....	51
4.1.2	ALOCÇÃO DO CONTROLE.....	58
<b>5</b>	<b>AMBIENTE DE SIMULAÇÃO.....</b>	<b>63</b>
5.1	REFERÊNCIA DE VELOCIDADES.....	63
5.2	CONTROLADORES.....	65
5.2.1	CONTROLADOR ADAPTATIVO.....	65
5.2.2	CONTROLADOR PI.....	66
5.2.3	FILTRO PASSA-BAIXA.....	67
5.3	VEÍCULO SUBMARINO.....	68
5.4	CORRENTE MARÍTIMAS.....	69
<b>6</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>73</b>
6.1	MÉTRICA DE DESEMPENHO.....	73
6.2	VETORES DE REFERÊNCIAS.....	74
6.3	CENÁRIO I.....	76
6.3.1	SISTEMA SEM PERTURBAÇÃO.....	76
6.3.2	SISTEMA COM PERTURBAÇÃO.....	80
6.4	CENÁRIO II.....	85
6.4.1	RESPOSTA DO SISTEMA.....	85

6.4.2	ESFORÇO DE CONTROLE .....	89
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>90</b>
7.1	CONTRIBUIÇÕES .....	90
7.2	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	91
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE A – MATRIZ PSEUDO-INVERSA.....</b>	<b>96</b>
	<b>APÊNDICE B – MATRIZ DE PROJEÇÃO ORTOGONAL .....</b>	<b>98</b>
	<b>APÊNDICE C – REGRA DE CRAMER .....</b>	<b>101</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A realização de pesquisas submarinas em águas profundas é um campo desafiador para a ciência, visto que as condições desse ambiente são inadequadas para a fisiologia humana. Esse cenário conduziu ao desenvolvimento de tecnologias que prescindem da presença humana *in loco*, como os veículos submarinos não tripulados (*unmanned underwater vehicles*, UUVs). Dentre as aplicações onde os UUVs vêm sendo utilizados, estão as operações associadas à produção de petróleo em alto mar, como o mapeamento geológico e a inspeção de estruturas submersas (SOARES, 2013; FAPESP, 2013).

No Brasil, a exploração de petróleo em alto mar é um campo que tem se destacado nos últimos anos por conta da descoberta de petróleo na camada pré-sal, que acabou alavancando as metas de produção de petróleo para os próximos anos (HADDAD & GIUBERTI, 2014). Aliado a isso, em 2012 a participação do petróleo e seus derivados na matriz energética brasileira correspondia a cerca de 40% e, durante os próximos anos, há a perspectiva de que a sua produção bruta continue crescendo (EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA, 2012).

Neste contexto de crescente importância da produção de petróleo em águas profundas e de sua insalubridade para a fisiologia humana, os veículos submarinos não tripulados apresentam-se como um campo oportuno para o desenvolvimento de novas tecnologias.

## 1.2 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Na literatura técnica internacional, é possível encontrar inúmeros trabalhos na área de controle aplicado a veículos submarinos não tripulados. Em LE *et al* (2013), é apresentado o desenvolvimento de um controlador PID não linear adaptativo aplicado a um veículo submarino com três propulsores. Este controlador mimetiza o princípio de células neurais, cujos parâmetros têm a capacidade de se adaptar à incerteza do sistema controlado, e o seu desempenho foi comparado ao de um controlador PID tradicional. Segundo o artigo, os resultados obtidos comprovaram o melhor desempenho do controlador adaptativo frente ao PID tradicional.

Em JALVING & STORKERSEN (1994), é proposta a utilização de um sistema de controle baseado em controladores PI para um veículo submarino autônomo. Este sistema de

controle é composto por três controladores PI: um para o controle da velocidade; um para o controle da orientação; e um para o controle de profundidade. Os resultados obtidos provaram a robustez e a estabilidade do sistema de controle durante experimentos em alto-mar.

Em CACCIA & VERUGGIO (2000), é proposto outro sistema de controle aplicado a um veículo submarino não tripulado. O controlador é baseado em uma estrutura hierárquica de três níveis, que engloba: controle de orientação (*guidance*); controle da dinâmica do veículo; e, por último, a alocação do controle no sistema de atuadores.

O controle de orientação baseia-se na teoria de *Lyapunov*, e comparou o desempenho de dois tipos diferentes de funções candidatas de *Lyapunov*, uma que considera apenas uma parcela proporcional ao sinal de erro (P), e outra que considera tanto uma parcela proporcional como uma parcela integral (PI). O controle da dinâmica baseia-se em controladores PI com escalonamento de ganho, cujos parâmetros de sintonia são funções do ponto de operação do sistema. Por último, a alocação de controle projetada baseou-se no conceito adaptativo, em caso de identificação de algum tipo falha no propulsor, a alocação de controle é alterada no intuito de obter um melhor desempenho no controle do veículo submarino.

Outra abordagem no controle de veículos submarinos se baseia na combinação da técnica de *backstepping* e na teoria estabilidade de *Lyapunov*, conforme foi sugerido por ENCARNAÇÃO & PASCOAL (2000) e, mais recentemente, por WANG *et al* (2009).

Podem ser encontrados na literatura técnica artigos que propõem técnicas de controle buscando melhorar o desempenho e estabilidade de veículos submarinos sujeito à ação de correntes marítimas variáveis, como por exemplo, em AGUIAR & PASCOAL (2002), onde é apresentada uma abordagem voltada para o posicionamento dinâmico do veículo submarino. O controlador proposto também se baseia na combinação da técnica de *backstepping* e teoria de estabilidade de *Lyapunov*. Em CAHARIJA *et al* (2012), o controlador proposto é baseado numa versão modificada do *Line-of-Sight* (LOS) *guidance* de três dimensões é proposto para o seguimento de trajetória de um veículo submarino neste mesmo cenário.

### 1.3 PROPOSTA DE TRABALHO

Este trabalho inspirou-se na lei de controle adaptativa proposta no livro FOSSEN (1994). Esta lei de controle baseia-se na análise de estabilidade de *Lyapunov* e, portanto,

espera que se obtenha um bom desempenho no controle de sistemas complexos, não lineares e que estejam sujeitos a perturbações externas.

Os veículos submarinos, além de serem sistemas complexos e não lineares, estão inseridos em um ambiente altamente dinâmico, logo, garantir a sua estabilidade é um ponto fundamental no projeto do sistema de controle. Por outro lado, a complexidade associada à implementação deste controlador adaptativo pode tornar questionável a sua aplicabilidade, caso este não apresente ganhos significativos em termos de desempenho com relação a outros controladores mais elementares.

O controlador PID, por sua vez, possui uma estrutura mais simples e, por conta disso, permanece sendo o mais largamente utilizado em veículos submarinos, apesar dos grandes avanços nas teorias de controle (FOSSSEN, 1994). Neste contexto, a contribuição deste trabalho visa estabelecer uma análise de desempenho entre o controlador adaptativo e o controlador PI aplicados ao controle de um veículo submarino.

Os resultados aqui apresentados são baseados em simulações realizadas no *toolbox* Simulink do Matlab<sup>®</sup>. Estas simulações consideraram que o veículo submarino deveria seguir uma referência de velocidade, e, ao mesmo tempo, estaria sujeito à ação de correntes marítimas variáveis. O desempenho dos controladores foi analisado de acordo com a métrica proposta de erro quadrático.

Por conta da inexistência de um veículo submarino real, a determinação dos parâmetros do modelo matemático baseou-se em considerações realizadas por outros autores na literatura técnica. É importante salientar que este trabalho não tem a intenção de validar a exatidão do modelo matemático, mas sim avaliar a estabilidade e desempenho das técnicas de controle em estudo.

No caso puramente servo, espera-se que o desempenho de ambos os controladores seja equiparável, visto que não há a presença de fatores externos que possam prejudicar a estabilidade e, conseqüentemente, o desempenho do controlador PI. Por outro lado, no caso servo-regulatório, espera-se que o controlador adaptativo apresente um comportamento menos oscilatório, resultando em um melhor desempenho, uma vez que a sua fundamentação teórica se dá no intuito de garantir a estabilidade do sistema.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A estrutura do trabalho está organizada da seguinte forma:

**Capítulo 2** – Apresenta as características físicas do submarino considerado e aborda os conceitos relativos à sua modelagem matemática.

**Capítulo 3** – Aborda os conceitos relativos à estabilidade de *Lyapunov*, bem como demonstra a obtenção da lei de controle proposta para o controlador adaptativo.

**Capítulo 4** – Apresenta sobre a modelagem matemática dos atuadores e discorre sobre a alocação de controle realizada para o controlador adaptativo.

**Capítulo 5** – Contextualiza o ambiente de simulação utilizado neste trabalho, fazendo uma breve apresentação dos vetores de referência considerados, dos controladores propostos, do veículo submarino e da perturbação devido a correntes marítimas.

**Capítulo 6** – Apresenta os resultados obtidos e faz as devidas análises.

**Capítulo 7** – Discorre sobre as principais contribuições deste trabalho e apresenta sugestões para trabalhos futuros.

## 2 MODELO FENOMENOLÓGICO

O veículo submarino possui uma dinâmica complexa e, portanto, o modelo matemático deve tentar representar da melhor forma possível o sistema real. Por outro lado, modelos matemáticos muito complexos (muitos coeficientes a se determinar, altamente não linear, etc.) acabam dificultando o projeto do sistema de controle. Desta forma, ao se determinar o modelo matemático do sistema, é fundamental buscar um compromisso entre a representatividade do sistema real e o seu nível de complexidade.

### 2.1 NOTAÇÃO UTILIZADA

Um veículo submarino possui 6 graus de liberdade, sendo 3 relativos à sua posição ou deslocamento e 3 relativos à sua orientação ou rotação. A Tabela 2.1 apresenta a notação utilizada para representar os diferentes graus de liberdade com base em (SNAME, 1950).

Tabela 2.1 - Notação utilizada para os 6 graus de liberdade.

<b>GRAU DE LIBERDADE</b>	<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>FORÇAS E MOMENTOS</b>	<b>VELOCIDADES LINEAR E ANGULAR</b>	<b>POSIÇÕES E ÂNGULOS DE EULER</b>
1	Deslocamentos no eixo x ( <i>surge</i> )	$X$	$u$	$x$
2	Deslocamentos no eixo y ( <i>sway</i> )	$Y$	$v$	$y$
3	Deslocamentos no eixo z ( <i>heave</i> )	$Z$	$w$	$z$
4	Rotações em torno do eixo x ( <i>roll</i> )	$K$	$p$	$\varphi$
5	Rotações em torno do eixo y ( <i>pitch</i> )	$M$	$q$	$\theta$
6	Rotações em torno do eixo z ( <i>yaw</i> )	$N$	$r$	$\psi$

## 2.2 O VEÍCULO SUBMARINO

### 2.2.1 DIMENSÕES PRINCIPAIS

Para o veículo submarino considerado neste trabalho, foi adotado um formato de esferoide prolato, conforme apresentado na Figura 2-1.

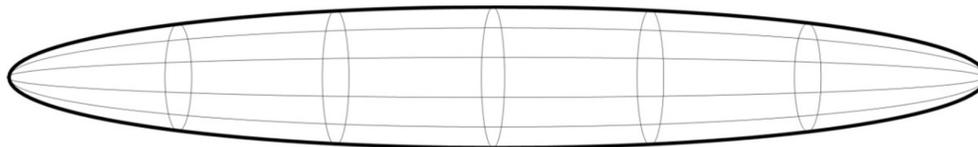


Figura 2-1 - Esferoide prolato.

Esse formato geométrico é um tipo de elipsoide com seção transversal circular, que foi escolhido por dois motivos:

- 1) Formato - possui três planos de simetria, o que permite desconsiderar os derivativos hidrodinâmicos cruzados (associados ao acoplamento entre movimentos), uma vez que eles se tornam insignificantes diante dos coeficientes hidrodinâmicos principais (relacionados ao deslocamento no próprio eixo) (IMLAY, 1961). Ao se desconsiderar tais coeficientes, o modelo matemático do veículo submarino torna-se mais simples. Além do mais, a determinação dos coeficientes hidrodinâmicos cruzados é mais complexa que a dos demais (FOSSEN, 1994). É importante observar que o veículo considerado nas simulações, conforme é apresentado na seção 2.2.2, apresenta aletas na sua parte traseira e, portanto, o número de planos de simetria do veículo fica reduzido a dois.
- 2) Dimensões - apresenta um coeficiente de arrasto mínimo para uma dada relação entre dimensões (comprimento/diâmetro máximo) segundo MYRING, 1976 *apud* PRESTERO (2001). Por conta disso, a relação entre as dimensões foi mantida igual à de PRESTERO (2001), que assumiu um valor igual a 7. Essa característica reduz o efeito das forças de arrasto, reduzindo as perdas por atrito;

As dimensões do esferoide prolato foram determinadas com base em outros veículos submarinos observados na literatura (PRESTERO, 2001; SOUZA, 2003; AAGE e SMITT, 1994), e são apresentadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Dimensões principais do veículo submarino.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	DESCRIÇÃO
$dx$	2,10	$m$	Dimensão do veículo no eixo x
$dy$	0,30	$m$	Dimensão do veículo no eixo y
$dz$	0,30	$m$	Dimensão do veículo no eixo z

Desta forma, o veículo possui a relação entre comprimento e diâmetro apresentada na equação (1).

$$\frac{C}{D} = 7 \quad (1)$$

O valor apresentado em (1) é igual àquele utilizado por PRESTERO (2001). A equação que descreve o raio do casco em função da posição axial (plano XY) é apresentada na equação (4).

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (2)$$

$$y = R(x), \quad (3)$$

$$R(x) = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}. \quad (4)$$

## 2.2.2 DIMENSÕES DAS ALETAS

As dimensões das aletas do veículo submarino, que foram determinadas com base em PRESTERO (2001), podem ser vistas na Figura 2-2. Uma visão traseira do veículo pode ser vista na Figura 2-3.

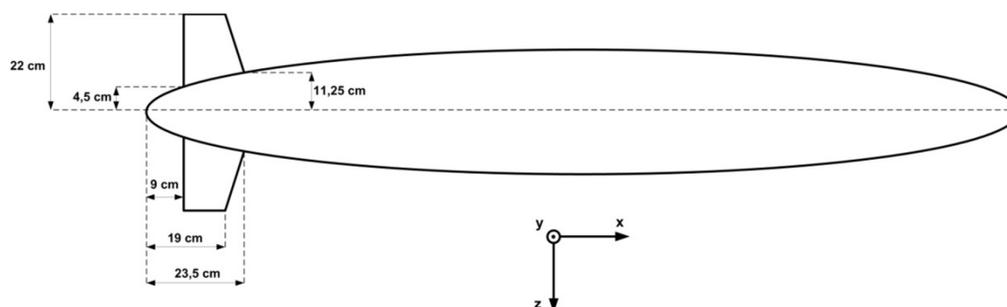


Figura 2-2 - Dimensões das aletas (plano XY).

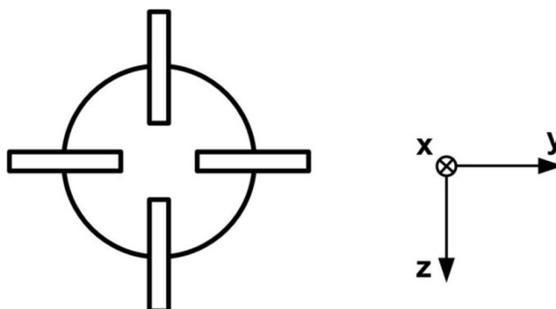


Figura 2-3 - Visão traseira do veículo (plano XZ)

A partir das dimensões apresentadas na Tabela 2.2 e na Figura 2-2, outros coeficientes que farão parte do modelo matemático do sistema são obtidos. A Figura 2-4 e a Figura 2-5 exibem a ilustração desses outros parâmetros importantes.

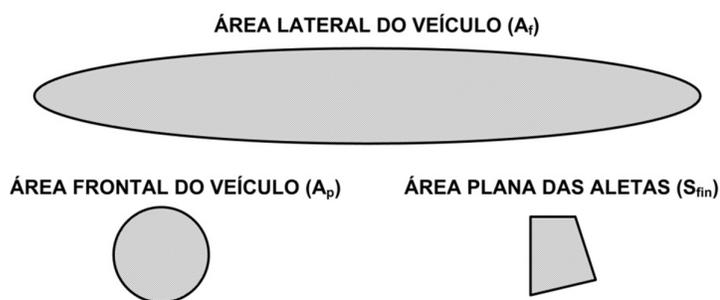


Figura 2-4 - Parâmetros de área do veículo submarino.

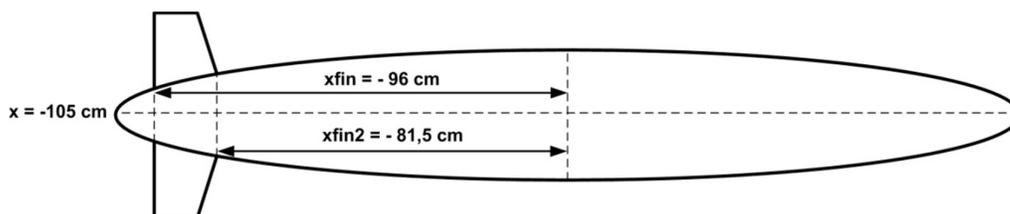


Figura 2-5 - Coordenadas das aletas.

Por fim, a distância média da aleta para o eixo axial do veículo ( $r_{mean}$ ) pode ser calculada através da equação (5).

$$r_{mean} = \frac{S_x}{Base} \quad (5)$$

sendo que as variáveis  $S_x$  e  $Base$  são ilustradas na Figura 2-6.

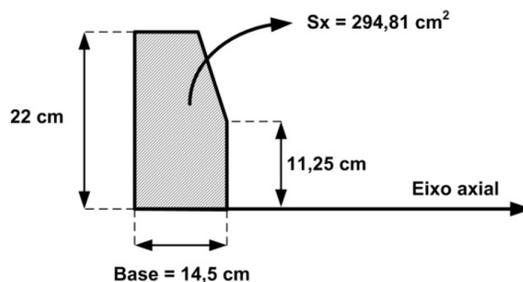


Figura 2-6 - Parâmetros para o cálculo de  $r_{mean}$ .

A Tabela 2.3 apresenta o valor encontrado para os parâmetros apresentados nesta seção.

Tabela 2.3 - Parâmetros do veículo submarino.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	DESCRIÇÃO
$A$	1,569	$m^2$	Área superficial do esferoide prolato
$A_f$	$7,070 \times 10^{-2}$	$m^2$	Área frontal do veículo (plano YZ)
$a_{fin}$	$2,2 \times 10^{-1}$	$m$	Distância entre o topo das aletas e o eixo axial
$A_p$	$1,575 \times 10^{-1}$	$m^2$	Área lateral do veículo (plano XY)
$C/D$	7,000	–	Relação entre comprimento e diâmetro
$d_x$	2,100	$m$	Comprimento no eixo X
$d_y$	0,300	$m$	Largura no eixo Y
$d_z$	0,300	$m$	Altura no eixo Z
$r_{mean}$	$2,033 \times 10^{-1}$	$m$	Distância média da aleta para o eixo axial do veículo
$S_{fin}$	$1,830 \times 10^{-2}$	$m^2$	Área plana das aletas
$V$	0,099	$m^3$	Volume do esferoide prolato
$x_{fin}$	$-9,600 \times 10^{-1}$	$m$	Coordenada axial do início das aletas
$x_{fin2}$	$-8,150 \times 10^{-1}$	$m$	Coordenada axial do final das aletas

### 2.2.3 PREMISSAS CONSIDERADAS

Algumas premissas foram adotadas com relação ao veículo submarino visando, dentre outras coisas, simplificar o modelo. As seguintes premissas foram consideradas na realização deste trabalho:

- Conforme sugerido em DA SILVA *et al* (2007), a dinâmica do motor dos propulsores e dos servomecanismos das aletas é muito mais rápida que a dinâmica do veículo submarino propriamente dito. Assim, da mesma forma que realizado em DA SILVA *et al* (2007), tais dinâmicas foram desconsideradas, pois são irrelevantes para o propósito deste trabalho;
- O veículo possuirá 3 (três) atuações apenas: uma em *surge*; uma em *pitch*; e uma em *yaw*. Entretanto, tendo em vista que tanto o deslocamento como as perturbações ocorrerão apenas no plano XY (horizontal), a atuação em *pitch* não é relevante para o propósito deste trabalho;
- Em PRESTERO (2001) é considerado que o veículo submarino move-se a uma velocidade constante igual a 1,51 m/s. Neste trabalho, para fins de análise de desempenho dos controladores, considerou-se duas velocidades diferentes de operação, 1 m/s e 2 m/s. As velocidades de operação do veículo impactam no modelo do veículo, uma vez que influenciam no número de *Reynolds* associado ao deslocamento de um corpo submerso. Essas alterações foram consideradas no modelo matemático do veículo submarino;
- A modelagem das forças hidrodinâmicas associadas a agentes do ambiente (i.e., ondas e correntes marítimas) não será considerada neste trabalho. As correntes marítimas serão consideradas, porém, elas serão tratadas como eventos aleatórios não previsíveis;
- O veículo submarino possuirá uma força de empuxo igual ao seu peso. Além disso, o centro de gravidade ( $r_G$ ) e o centro de empuxo ( $r_B$ ) serão coincidentes. Essa premissa pode ser alcançada com o auxílio de um sistema de controle de empuxo, como é apresentado em DAVIS *et al* (2002), que permite controlar a intensidade e o centro da força empuxo. Embora este sistema não seja implementado neste trabalho, esta premissa foi considerada no intuito de permitir o deslocamento do veículo submarino no plano horizontal sem que houvesse a atuação de forças no eixo vertical. Esta premissa torna o veículo estável na ausência de outras forças, pois a força empuxo e a força peso anulam-se. As variáveis associadas às forças peso e empuxo (valor e coordenadas) foram definidas com base em PRESTERO (2001) e são exibidas na Tabela 2.4, que também inclui o valor da gravidade e da densidade da água do mar a 15°C, também de acordo com PRESTERO (2001).

Tabela 2.4 - Variáveis associadas às forças peso e empuxo.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	DESCRIÇÃO
$B$	$2,100 \times 10^2$	$N$	Força de empuxo
$g$	9,8	$m/s^2$	Aceleração da gravidade
$\rho$	999,1	$kg/m^3$	Densidade da água do mar a 15 °C
$rG$	[0; 0; 0,02]	$m$	Coordenadas do centro de gravidade
$rB$	[0; 0; 0,02]	$m$	Coordenadas do centro de empuxo
$W$	$2,000 \times 10^2$	$N$	Peso

### 2.3 SISTEMA DE COORDENADAS

Quando se analisa o movimento de um veículo submarino com 6 graus de liberdade, é conveniente definir dois sistemas de coordenadas diferentes, um fixado no próprio veículo (*Body-fixed*) e outro fixado em um referencial externo, neste caso a Terra (*Earth-fixed*) (FOSSSEN, 1994), conforme pode ser visto na Figura 2-7.

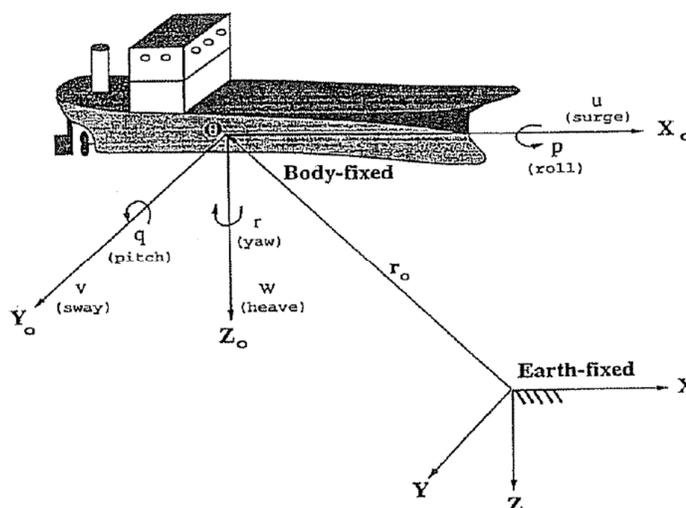


Figura 2-7 - Sistemas de coordenadas do veículo submarino (FOSSSEN, 1994).

O sistema fixado no corpo é representado pelo eixo  $X_0Y_0Z_0$ , enquanto que o sistema fixado na Terra é representado pelo eixo  $XYZ$ .

Para veículos submarinos é assumido que a aceleração de um ponto qualquer na superfície da terra pode ser considerada nula e, portanto, um sistema de coordenadas  $XYZ$  fixada na Terra é um sistema inercial (FOSSSEN, 1994).

A posição e a orientação do veículo são definidas com relação ao sistema de coordenadas inercial (fixado na Terra), enquanto que as velocidades linear e angular são definidas em relação ao sistema de coordenadas fixadas no corpo do veículo (FOSSEN, 1994).

Baseado na notação apresentada na Tabela 2.1, o movimento genérico de um veículo submarino com 6 graus de liberdade pode ser definido de acordo com os vetores apresentados nas equações (6), (7) e (8) (FOSSEN, 1994).

$$\eta = [\eta_1^T, \eta_2^T]^T; \quad \eta_1 = [x, y, z]^T; \quad \eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^T; \quad (6)$$

$$v = [v_1^T, v_2^T]^T; \quad v_1 = [u, v, w]^T; \quad v_2 = [p, q, r]^T; \quad (7)$$

$$\tau = [\tau_1^T, \tau_2^T]^T; \quad \tau_1 = [X, Y, Z]^T; \quad \tau_2 = [K, M, N]^T; \quad (8)$$

sendo  $\eta$  o vetor de posição e orientação com coordenadas fixadas na terra,  $v$  representa o vetor de velocidades linear e angular com coordenadas fixadas no corpo do veículo e  $\tau$  representa o vetor de forças e momentos com coordenadas fixadas também no corpo do veículo.

Tendo em vista que o vetor de posição e orientação  $\eta$  é representado com relação ao sistema de coordenadas fixadas na Terra e que o vetor de velocidades  $v$  é representado com relação ao sistema de coordenadas fixadas no corpo do veículo, pode-se estabelecer uma relação entre a taxa de variação da posição ( $\dot{\eta}$ ) e o vetor de velocidades ( $v$ ) através de uma transformação de coordenadas (FOSSEN, 1994), conforme é apresentado na equação (9).

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} J_1(\eta_2) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{bmatrix}}^{J(\eta)} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

sendo  $J(\eta)$  uma matriz de transformação entre o sistema de coordenadas fixadas no corpo do veículo e o sistema de coordenadas inercial. Essa matriz está relacionada aos ângulos *roll* ( $\phi$ ), *pitch* ( $\theta$ ) e *yaw* ( $\psi$ ) e o cálculo de seus termos  $J_1$  e  $J_2$  é apresentado nas equações (10) e (11), respectivamente.

$$J_1(\eta_2) = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi + \sin\theta\sin\psi\cos\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$J_2(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

A relação inversa também pode ser encontrada, conforme é apresentada na equação (12).

$$v = J(\eta)^{-1}\dot{\eta} \quad (12)$$

## 2.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO PARA 6-DOF

O modelo matemático de um veículo submarino de massa  $m$  e centro de gravidade ( $x_G$ ,  $y_G$  e  $z_G$ ), expresso em termos de coordenadas fixadas no corpo, pode ser descrito através das equações diferenciais apresentadas pela expressão (13) (FOSSSEN, 1994).

$$\begin{cases} X = m[\dot{u} - vr + wq - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(pr + \dot{q})] \\ Y = m[\dot{v} - wp + ur - y_G(r^2 + p^2) + z_G(qr - \dot{p}) + x_G(qp + \dot{r})] \\ Z = m[\dot{w} - uq + vp - z_G(p^2 + q^2) + x_G(rp - \dot{q}) + y_G(rq + \dot{p})] \\ K = I_x\dot{p} + (I_z - I_y)qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} + (r^2 - q^2)I_{yz} + (pr - \dot{q})I_{xy} \\ \quad + m[y_G(\dot{w} - uq + vp) - z_G(\dot{v} - wp + ur)] \\ M = I_y\dot{q} + (I_x - I_z)rp - (p + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + (qp - \dot{r})I_{yz} \\ \quad + m[z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)] \\ N = I_z\dot{r} + (I_y - I_x)p - (q + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{zx} \\ \quad + m[x_G(\dot{v} - wp + ur) - y_G(\dot{u} - vr + wq)] \end{cases} \quad (13)$$

sendo que:

- $X, Y$  e  $Z$  denotam as forças externas;
- $K, M$  e  $N$  denotam os momentos externos;
- $I_x, I_y$  e  $I_z$  são os momentos de inércia;
- $I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zx}$  e  $I_{zy}$  são os produtos de inércia;
- $u, v$  e  $w$  são as velocidades lineares, conforme apresentadas na Tabela 2.1;
- $p, q$  e  $r$  são as velocidades angulares, conforme apresentadas na Tabela 2.1.

As três primeiras equações diferenciais representam o movimento translacional enquanto as três últimas equações representam o movimento rotacional. Essas equações podem ser representadas em uma forma mais compacta, conforme apresentado na equação (14) (FOSSEN, 1994).

$$M_{RB} \dot{v} + C_{RB}(v) v = \tau_{RB}, \quad (14)$$

sendo  $M_{RB}$  a matriz de inércia,  $C_{RB}$  a matriz que incorpora o efeito Coriolis e forças centrípetas,  $\tau_{RB}$  o vetor de forças e momentos e  $v$  o vetor de velocidades linear e angular.

A parametrização da matriz  $M_{RB}$  é única e é apresentada na equação (15) (FOSSEN, 1994).

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

É importante ressaltar que  $M_{RB}$  é uma matriz simétrica, definida positiva e invariante no tempo, e, portanto, as propriedades apresentadas na equação (16) são válidas (FOSSEN, 1994).

$$\begin{cases} M_{RB} = M_{RB}^T, \\ M_{RB} > 0, \\ \dot{M}_{RB} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

A parametrização da matriz  $C_{RB}$ , por sua vez, não é única e, conforme realizado em (FOSSEN, 1991), pode-se parametrizá-la de modo que se obtenha uma matriz antissimétrica.

A matriz  $C_{CR}$  é apresentada na equação (17).

$$C_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -mr & mq & m(y_G q + z_G r) & -mx_G q & -mx_G r \\ mr & 0 & mp & -my_G p & m(z_G r + x_G p) & -my_G r \\ -mq & mp & 0 & -mz_G p & -mz_G q & m(x_G p + y_G q) \\ -m(y_G q + z_G r) & my_G p & mz_G p & 0 & -I_{yz} q - I_{xz} p + I_z r & I_{yz} r + I_{xy} p - I_y q \\ mx_G q & -m(z_G r + x_G p) & mz_G q & I_{yz} q + I_{xz} p - I_z r & 0 & -I_{xz} r - I_{xy} q + I_x p \\ mx_G r & my_G r & -m(x_G p + y_G q) & -I_{yz} r - I_{xy} p + I_y q & I_{xz} r + I_{xy} q - I_x p & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Devido à antissimetria da matriz  $C_{RB}$ , as propriedades apresentadas na equação (18) são válidas e poderão ser exploradas no intuito de simplificar o projeto do sistema de controle não linear (FOSSSEN, 1994).

$$\begin{cases} C_{RB} = -C_{RB}^T, \\ x^T C_{RB} x = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Em ambas as matrizes ( $M_{RB}$  e  $C_{RB}$ ), por conta dos dois planos de simetria do veículo (XY e XZ), os produtos de inércia ( $I_{xz}$ ,  $I_{xy}$  e  $I_{yz}$ ) podem ser considerados nulos (PRESTERO, 2001).

## 2.5 FORÇAS E MOMENTOS HIDRODINÂMICOS

Em hidrodinâmica é comum assumir que as forças e momentos hidrodinâmicos podem ser linearmente superpostos em dois subproblemas (FALTINSEN, 1990, *apud* FOSSSEN, 1994, p.30), que são descritos nos itens 2.5.1 e 2.5.2.

### 2.5.1 Subproblema 1 - Forças Induzidas por Radiação

Estas forças ocorrem quando o corpo submerso é forçado a oscilar juntamente com a frequência de oscilação das ondas, não havendo ondas incidentes.

As forças induzidas por radiação podem ser consideradas como a soma das três seguintes componentes:

- Massa adicionada devido à inércia do fluido que cerca o corpo rígido;
- Amortecimento potencial induzido por radiação devido à energia levada pelas ondas geradas na superfície do corpo rígido;
- Forças restauradoras devido ao Princípio de Arquimedes.

A contribuição destas três parcelas pode ser calculada conforme é apresentado na equação (19).

$$\tau_R = - \overbrace{M_A \dot{v} - C_A(v)v}^{\text{Massa Adicionada}} - \overbrace{D_p(v)v}^{\text{Amortecimento Potencial}} - \overbrace{g(\eta)}^{\text{Forças Restauradoras}} \quad (19)$$

Os cálculos dos termos  $M_A$ ,  $C_A$  e  $g(\eta)$  serão apresentados nas seções 2.5.3, 2.5.4 e 2.5.6, respectivamente.

Além do amortecimento potencial induzido por radiação ( $D_p$ ), outros tipos de amortecimento devem ser levados em conta, como a fricção superficial, amortecimento de deriva das ondas e o amortecimento devido a vórtices, conforme apresentado na equação (20).

$$\tau_D = - \overbrace{D_S(v)v}^{\text{Fricção Superficial}} - \overbrace{D_W(v)v}^{\text{Amortecimento de Deriva}} - \overbrace{D_M(v)v}^{\text{Vórtices}} \quad (20)$$

Assim, as forças e momentos hidrodinâmicos ( $\tau_H$ ) podem ser escritos como o somatório das equações (19) e (20), conforme é apresentado na expressão (21).

$$\tau_H = -M_A\dot{v} - C_A(v)v - D(v)v - g(\eta), \quad (21)$$

sendo:

$$D(v) \triangleq D_p(v) + D_S(v) + D_W(v) + D_M(v). \quad (22)$$

O cálculo da matriz de amortecimento hidrodinâmico  $D(v)$  será apresentado na seção 2.5.5. Também é importante ressaltar que, conforme premissa exposta no capítulo 2.2.3, as forças empuxo e gravitacional se anulam e, portanto, o termo  $g(\eta)$  é nulo.

### 2.5.2 Subproblema 2 - Froude-Kriloff e Forças de Difração

Estas forças ocorrem quando o corpo rígido submerso é impedido de oscilar e, portanto, há a ocorrência de ondas incidentes. Aqui se considera a influência de agentes do ambiente, como ondas e correntes marítimas.

Neste trabalho, conforme mencionado em 2.2, este tipo de força não será considerada no modelo matemático do veículo.

Por fim, o modelo matemático a ser considerado é apresentado na equação (23).

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + \overbrace{g(\eta)}^{=0} = \tau, \quad (23)$$

sendo:

$$M \triangleq M_{CR} + M_A, \quad (24)$$

e:

$$C(v) \triangleq C_{CR}(v) + C_A(v). \quad (25)$$

### 2.5.3 Matriz de Inércia Adicionada

De acordo com FOSSEN (1994), a matriz de inércia adicionada ( $M_A$ ) pode ser expressa conforme é apresentado na equação (26).

$$M_A = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

sendo que a notação da SNAME (1950) é utilizada nesta expressão. Nesta notação,  $Y_{\dot{u}}$  expressa a massa hidrodinâmica adicionada ao longo do eixo  $y$  por conta de uma aceleração  $\dot{u}$  (direção do eixo  $x$ ), que em termos matemáticos pode ser escrita conforme apresentada na equação (27).

$$Y_{\dot{u}} \triangleq \frac{\partial Y}{\partial \dot{u}} \quad (27)$$

O cálculo destes derivativos hidrodinâmicos é apresentado na seção 4.1.1.

Devido aos dois planos de simetria do veículo submarino, a matriz  $M_A$  pode ser simplificada (PRESTERO, 2001), conforme é apresentado na equação (28).

$$M_A = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & N_{\dot{v}} \\ 0 & 0 & Z_{\dot{w}} & 0 & M_{\dot{w}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\dot{p}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\dot{q}} & 0 & M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & Y_{\dot{r}} & 0 & 0 & 0 & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

É importante ressaltar que, assim como a matriz de inércia do veículo ( $M_{RB}$ ), a matriz de inércia adicionada também é simétrica, definida positiva e invariante no tempo (FOSSEN, 1994). Conforme será apresentado no item 2.6.2, os elementos simétricos à diagonal principal possuem valores iguais. Sendo assim, as propriedades apresentadas na equação (29) são válidas (FOSSEN, 1994).

$$\begin{cases} M_A = M_A^T, \\ M_A > 0, \\ \dot{M}_A = 0. \end{cases} \quad (29)$$

### 2.5.4 Matriz Coriolis Centrípeta Adicionada

Também de acordo com FOSSEN (1994), a matriz Coriolis e centrípeta adicionada pode ser expressa através da equação (30).

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

sendo:

$$\begin{cases} a_1 = X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r \\ a_2 = X_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r \\ a_3 = X_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r \\ b_1 = X_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r \\ b_2 = X_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r \\ b_3 = X_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + M_{\dot{q}}q + N_{\dot{r}}r \end{cases}. \quad (31)$$

A matriz  $C_A$  também pode ser simplificada por conta dos dois planos de simetria do veículo. O *toolbox GNC* (MSS, 2010) permite calcular o valor da matriz Coriolis centrípeta a partir da matriz  $M_A$  e do vetor de velocidades  $v$ . A matriz  $C_A$  apresentada na equação (32) foi encontrada considerando-se a matriz  $M_A$  apresentada na equação (28) e utilizando-se o *toolbox GNC* (MSS, 2010).

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -K_2 & K_1 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & -K_1 & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -K_2 & K_1 & 0 & -K_4 & K_3 \\ K_2 & 0 & -X_{\dot{u}}u & K_4 & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -K_1 & X_{\dot{u}}u & 0 & -K_3 & K_{\dot{p}}p & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

sendo:

$$\begin{cases} K_1 = Y_{\dot{v}}v + \frac{1}{2}(N_v + Y_r)r \\ K_2 = Z_{\dot{w}}w + \frac{1}{2}(M_w + Z_q)q \\ K_3 = M_{\dot{q}}q + \frac{1}{2}(M_w + Z_q)w \\ K_4 = N_{\dot{r}}r + \frac{1}{2}(N_v + Y_r)v \end{cases} \quad (33)$$

Assim como  $C_{RB}$ , a matriz coriolis e centrípeta adicionada também é antissimétrica e, portanto, as propriedades apresentadas na equação (34) são válidas (FOSSEN, 1994).

$$\begin{cases} C_A = -C_A^T \\ x^T C_A x = 0. \end{cases} \quad (34)$$

### 2.5.5 Amortecimento Hidrodinâmico

Conforme apresentado na equação (22), o amortecimento hidrodinâmico pode ser expresso como o somatório dos diversos tipos de amortecimento. Segundo FOSSEN (1994), a matriz do amortecimento total  $D(v)$  é real, não simétrica e definida positiva. Portanto, a propriedade (35) é válida.

$$D(v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^6. \quad (35)$$

Essa propriedade pode ser verificada, pois forças hidrodinâmicas são dissipativas, logo, a matriz  $D(v)$  deve ser definida positiva (FOSSEN, 1994).

Termos de ordem elevada, assim como aqueles que não pertencem à sua diagonal principal, são difíceis de serem determinados. Segundo FOSSEN (1994), para veículos submersos que se movem em baixa velocidade (até 2 m/s), uma aproximação para a matriz  $D(v)$  é apresentada na expressão (36).

$$D(v) = \begin{bmatrix} -X_u - X_{u|u}|u| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v - Y_{v|v}|v| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_w - Z_{w|w}|w| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_p - K_{p|p}|p| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_q - M_{q|q}|q| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_r - N_{r|r}|r| \end{bmatrix} \quad (36)$$

O cálculo dos termos derivativos hidrodinâmicos (1ª e 2ª ordem) será apresentado na seção 2.6.

### 2.5.6 Forças e Momentos Restauradores

Na hidrodinâmica, as forças gravitacional e de empuxo são chamadas de forças restauradoras. A força gravitacional irá atuar sobre o centro de gravidade do corpo ( $r_G = [x_G; y_G; z_G]$ ) e, de forma análoga, a força de empuxo atuará sobre o centro de empuxo do corpo ( $r_E = [x_E; y_E; z_E]$ ). Essas forças possuem componentes ao longo de todos os eixos do corpo submerso, que pode ser expresso pela equação (37) (FOSSEN, 1994).

$$g(\eta) = \begin{bmatrix} (W - B)s\theta \\ -(W - B)c\theta s\phi \\ -(W - B)c\theta s\phi \\ -(W y_G - B y_B)c\theta c\phi + (W z_G - B z_B)c\theta s\phi \\ (W z_G - B z_B)s\theta + (W x_G - B x_B)c\theta c\phi \\ -(W x_G - B x_B)c\theta s\phi - (W y_G - B y_B)s\theta \end{bmatrix} \quad (37)$$

Conforme apresentado no item 2.2, o veículo submarino é estável na ausência de forças externas, ou seja, as forças de empuxo e gravitacional se anulam. Neste caso, as forças restauradoras são sempre nulas.

## 2.6 CÁLCULO DE PARÂMETROS

Nesta seção serão exibidos os cálculos dos parâmetros necessários para definição do modelo matemático do veículo submarino.

### 2.6.1 Momentos de Inércia

Os momentos de inércia de um sólido geométrico podem ser calculados de acordo com as equações apresentadas na equação (38) (WEISSTEIN, 2014).

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_V \rho(y^2 + z^2) dV \\ I_{yy} = \int_V \rho(x^2 + z^2) dV \\ I_{zz} = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV \end{cases} \quad (38)$$

sendo  $\rho$  a densidade do sólido em questão. Resolvendo as equações apresentadas em (38), obtêm-se as expressões finais para os momentos de inércia do esferoide prolato, apresentadas na equação (39) (WEISSTEIN, 2014).

$$\begin{cases} I_{xx} = \frac{1}{5}m \left( \frac{d_y^2}{4} + \frac{d_z^2}{4} \right), \\ I_{yy} = \frac{1}{5}m \left( \frac{d_x^2}{4} + \frac{d_z^2}{4} \right), \\ I_{zz} = \frac{1}{5}m \left( \frac{d_x^2}{4} + \frac{d_y^2}{4} \right). \end{cases} \quad (39)$$

Os valores dos momentos de inércias obtidos a partir da equação (39) são exibidos na Tabela 2.5.

Tabela 2.5 - Momentos de inércia.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	DESCRIÇÃO
$I_{xx}$	0,184	$kg \cdot m^2$	Momento de inércia em torno do eixo X
$I_{yy}$	4,592	$kg \cdot m^2$	Momento de inércia em torno do eixo Y
$I_{zz}$	4,592	$kg \cdot m^2$	Momento de inércia em torno do eixo Z

## 2.6.2 Derivativos Hidrodinâmicos de 1ª Ordem

Em PRESTERO (2001), o cálculo da massa adicionada no eixo axial ( $X_{\dot{u}}$ ) desconsiderou a influência das aletas, aproximando-se o veículo a um elipsoide puro. De forma análoga ao que foi realizado em PRESTERO (2001), neste trabalho desconsiderou-se a influência das aletas no cálculo de  $X_{\dot{u}}$ , e então aproximou-se o veículo a um esferoide prolato puro e os cálculos foram realizados com base em IMLAY (1961).

No caso dos demais derivativos (fluxo cruzado e rolamento), foi utilizada a aproximação apresentada em PRESTERO (2001), por conta da significativa influência da aletas presentes na traseira do veículo.

### 2.6.2.1 Massa Adicionada no Eixo Axial

De acordo com IMLAY (1961), a massa adicionada no eixo axial para um esferoide prolato pode ser calculada pela equação (40).

$$X_{\dot{u}} = -\frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} m, \quad (40)$$

sendo que:

$$a = \frac{d_x}{2}, \quad (41)$$

$$b = \frac{d_y}{2} = \frac{d_z}{2}, \quad (42)$$

$$e = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad (43)$$

$$\alpha_0 = \frac{2(1 - e^2)}{e^3} \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right) - e \right). \quad (44)$$

sendo  $e$  a excentricidade do esferoide prolato. Os valores de  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  podem ser vistos na Tabela 2.2.

O valor encontrado para a massa adicionada no eixo axial ( $X_{\dot{u}}$ ) é exibido na Tabela 2.6.

#### 2.6.2.2 Massa Adicionada por Fluxo Cruzado

De acordo com NEWMAN (1977) *apud* PRESTERO (2001), a massa adicionada por unidade de comprimento de uma única fatia cilíndrica é dada pela equação (45).

$$m_a(x) = \pi \rho R(x)^2 \quad (45)$$

sendo  $\rho$  a densidade do fluido que cerca o corpo rígido, exibido na Tabela 2.4, e  $R(x)$  o raio do casco em função da posição axial, conforme apresentado na equação (4).

Por sua vez, a massa adicionada de um círculo com aletas, segundo BLEVINS, 1979 *apud* PRESTERO (2001), pode ser calculada através da equação (46).

$$m_{af}(x) = \pi \rho \left( a_{fin}^2 - R(x)^2 + \frac{R(x)^4}{a_{fin}^2} \right) \quad (46)$$

sendo  $a_{fin}$  a distância entre o topo das aletas e o eixo axial do veículo, que foi definida na Tabela 2.3. Integrando-se as equações (45) e (46) ao longo do eixo axial do veículo, obtêm-se as equações para as massas adicionadas devido ao fluxo cruzado (PRESTERO, 2001), conforme são apresentadas na equação (47).

$$\left\{ \begin{array}{l}
Y_{\dot{v}} = - \int_{-l/2}^{xfin} m_a(x) dx - \int_{xfin}^{xfin2} m_{af}(x) dx - \int_{xfin2}^{l/2} m_a(x) dx, \\
M_{\dot{w}} = - \int_{-l/2}^{xfin} x m_a(x) dx - \int_{xfin}^{xfin2} x m_{af}(x) dx - \int_{xfin2}^{l/2} x m_a(x) dx, \\
M_{\dot{q}} = - \int_{-l/2}^{xfin} x^2 m_a(x) dx - \int_{xfin}^{xfin2} x^2 m_{af}(x) dx - \int_{xfin2}^{l/2} x^2 m_a(x) dx, \\
N_{\dot{v}} = -M_{\dot{w}}, \\
Y_{\dot{r}} = N_{\dot{v}}, \\
Z_{\dot{q}} = M_{\dot{w}}, \\
N_{\dot{r}} = M_{\dot{q}}.
\end{array} \right. \quad (47)$$

sendo  $l$  o comprimento do veículo submarino ( $dx$ ),  $xfin$  e  $xfin2$  parâmetros de localização das aletas que foram definidos na seção 2.2.2. O valor encontrado para as massas adicionadas por fluxo cruzado ( $Y_{\dot{v}}$ ,  $M_{\dot{w}}$ ,  $M_{\dot{q}}$ ,  $N_{\dot{v}}$ ,  $Y_{\dot{r}}$ ,  $Z_{\dot{q}}$  e  $N_{\dot{r}}$ ) é exibido na Tabela 2.6.

### 2.6.2.3 Massa Adicionada por Rolamento

Conforme realizado em PRESTERO (2001), o cálculo da massa adicionada por rolamento desconsiderará os efeitos da curvatura do casco do veículo. Sendo assim, a massa adicionada por rolamento será calculada com base apenas no efeito das aletas (BLEVINS, 1979 *apud* PRESTERO, 2001), conforme apresentado na equação (48).

$$K_{\dot{p}} = - \int_{xfin}^{xfin2} \frac{2}{\pi} \rho \delta(x)^4 dx \quad (48)$$

sendo  $\delta(x)$  a função da altura da aleta com relação ao eixo axial e  $\rho$  a densidade do fluido que cerca o veículo, no caso a água do mar. Conforme realizado em PRESTERO (2001), a função  $\delta(x)$  foi aproximada para a altura média da aleta em relação ao eixo axial ( $r_{mean}$ ).

O valor encontrado para a massa adicionada por rolamento ( $K_{\dot{p}}$ ) é exibido na Tabela 2.6.

### 2.6.2.4 Valores Calculados

A partir das equações apresentadas nas seções 2.6.2.1, 2.6.2.2 e 2.6.2.3, os derivativos hidrodinâmicos de 1ª ordem foram calculados e são apresentados na Tabela 2.6.

Tabela 2.6 - Derivativos hidrodinâmicos de 1ª ordem.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE
$X_{\dot{u}}$	-0,732	<i>kg</i>
$Y_{\dot{v}}$	-1,155 x 10 <sup>2</sup>	<i>kg</i>
$Y_{\dot{r}}$	-1,480 x 10 <sup>1</sup>	<i>kg · m/rad</i>
$Z_{\dot{w}}$	-1,155 x 10 <sup>2</sup>	<i>kg</i>
$Z_{\dot{q}}$	1,480 x 10 <sup>1</sup>	<i>kg · m/rad</i>
$K_{\dot{p}}$	-0,1575	<i>kg · m<sup>2</sup>/rad</i>
$M_{\dot{w}}$	1,480 x 10 <sup>1</sup>	<i>kg · m</i>
$M_{\dot{q}}$	-3,500 x 10 <sup>1</sup>	<i>kg · m<sup>2</sup>/rad</i>
$N_{\dot{r}}$	-3,500 x 10 <sup>1</sup>	<i>kg · m<sup>2</sup>/rad</i>
$N_{\dot{v}}$	-1,480 x 10 <sup>1</sup>	<i>kg · m</i>

### 2.6.3 Derivativos Hidrodinâmicos de 2ª Ordem

#### 2.6.3.1 Arrasto Axial

Segundo PRESTERO (2001), a força de arrasto axial pode ser calculada através da relação empírica apresentada na equação (49).

$$X = -\frac{1}{2}\rho c_d A_f u |u| \quad (49)$$

Assim, pode-se definir o coeficiente não linear de arrasto axial conforme a equação (50).

$$X_{u|u} = -\frac{1}{2}\rho c_d A_f \quad (50)$$

sendo  $\rho$  a densidade do fluido no qual o veículo encontra-se submerso (água do mar),  $c_d$  é o coeficiente de arrasto axial do veículo e  $A_f$  é a área frontal do veículo. O parâmetro  $\rho$  é exibido na Tabela 2.4, enquanto que o valor de  $A_f$  pode ser encontrado na Tabela 2.3. O cálculo do coeficiente de arrasto axial é apresentado na seção 2.6.3.2 e o valor encontrado para o arrasto axial ( $X_{u|u}$ ) é exibido na Tabela 2.8.

### 2.6.3.2 Coeficiente de Arrasto Axial

De acordo com HOERNER (1965), o coeficiente de arrasto axial  $c_d$  para um corpo elipsoidal pode ser calculado de acordo com a equação (51).

$$C_d = 0,44 \cdot \left(\frac{d}{l}\right) + 4 \cdot C_f \cdot \left(\frac{l}{d}\right) + 4 \cdot C_f \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^{1/2}, \quad (51)$$

sendo  $d$  o diâmetro do corpo,  $l$  o seu comprimento e  $C_f$  o coeficiente de fricção superficial. Os valores de  $d$  e  $l$  podem ser encontrados na Tabela 2.2. De acordo com LEWIS (1988), o coeficiente de fricção  $C_f$  pode ser calculado de duas formas diferentes, a depender do regime de escoamento (laminar ou turbulento). A Figura 2-8 exibe a relação existente entre o coeficiente  $C_f$  e o número de *Reynolds*.

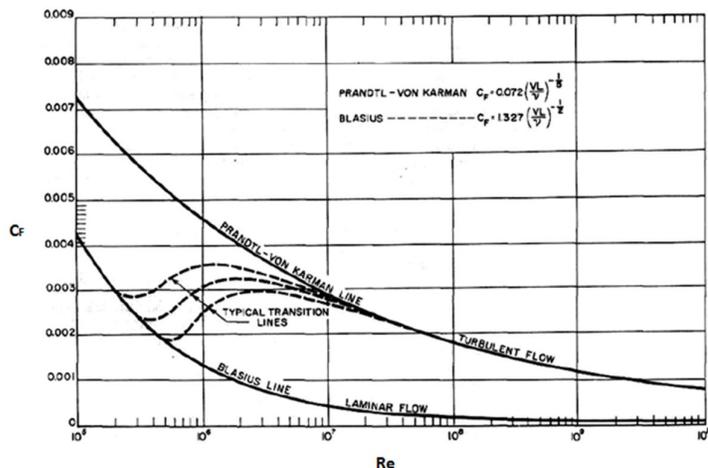


Figura 2-8 - Coeficiente de fricção superficial em função do número de *Reynolds* (LEWIS, 1988).

Note que para valores até aproximadamente  $2 \times 10^5$  o regime é puramente laminar. Também é importante ressaltar que o coeficiente de fricção superficial ( $C_f$ ) é inversamente proporcional ao número de *Reynolds*, e este, por sua vez, é diretamente proporcional à velocidade. Ou seja, um aumento na velocidade de deslocamento (de 1 m/s para 2 m/s, por exemplo), desde que se mantenha na mesma região de escoamento, reduzirá o efeito da fricção superficial. Isso pode ser verificado na Tabela 2.7, onde são exibidos os valores dos parâmetros calculados nesta seção.

Uma possível fórmula que relaciona o coeficiente de fricção superficial e o número de *Reynolds* para o regime laminar é sugerida por BLASIUS (1908) *apud* LEWIS (1988), e é apresentada na equação (52).

$$C_f = 1,327 \cdot Re^{-1/2}, \quad (52)$$

sendo  $Re$  o número de *Reynolds* para o regime de escoamento em questão.

Para valores superiores a aproximadamente  $1 \times 10^7$  o regime é turbulento. Neste caso, o coeficiente de fricção superficial pode ser calculado de acordo com PRANDTL e VON KARMAN (1921) *apud* LEWIS (1988), conforme apresentado na equação (53).

$$C_f = 0,072 \cdot Re^{-1/5}, \quad (53)$$

A transição entre o regime laminar e turbulento não ocorre de forma homogênea ao longo do corpo submerso (LEWIS, 1988). Além disso, o valor de  $C_f$  crescerá ao longo de uma linha de transição conforme apresentado na Figura 2-8.

Note que não há uma linha de transição única, pois esta linha dependerá de variáveis como o nível inicial de turbulência do fluido e o formato do corpo submerso (região frontal e relação proporcional entre comprimento e diâmetro) (LEWIS, 1988). Tendo em vista que neste estudo o deslocamento do corpo submerso se dará em um regime do tipo laminar, conforme será mostrado adiante, a análise mais profunda dessa faixa de transição torna-se irrelevante para o propósito deste trabalho.

O número de *Reynolds* para um corpo deslocando-se submerso em um fluido pode ser calculado através da equação (54) (REYNOLDS, 1883 *apud* LEWIS, 1988);

$$Re = \frac{Vl}{\nu}, \quad (54)$$

sendo  $V$  a velocidade de deslocamento do corpo submerso,  $l$  o seu comprimento característico e  $\nu$  a viscosidade do fluido, que para a água do mar a  $15^\circ\text{C}$  é igual a  $1,190 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (NEWMAN, 1977 *apud* PRESTERO, 2001).

Por não possuir uma formato geométrico tradicional (esférico ou plano, por exemplo), o comprimento característico de um esferoide prolato não é trivial. De acordo com KULA e YOVANOVICH (1991), o comprimento característico de um corpo complexo pode ser calculado através da equação genérica (55).

$$l = G \frac{V}{A}, \quad (55)$$

sendo  $V$  o volume (ver Tabela 2.3),  $A$  a área superficial (ver Tabela 2.3) e  $G$  o índice geométrico do corpo rígido. O índice geométrico  $G$  é definido com relação às dimensões de um suposto paralelepípedo com dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , sendo  $a \leq b \leq c$ , e pode ser calculado conforme apresentado na expressão (56) (KULA e YOYANOVICH, 1991).

$$G = 1 + \frac{1}{AR_{21}} + \frac{1}{AR_{21} \cdot AR_{32}}, \quad (56)$$

sendo  $AR_{xx}$  as razões de aspecto, que são definidas nas relações (57) e (58) (KULA e YOYANOVICH, 1991).

$$R_{21} = \frac{b}{a} \geq 1, \quad (57)$$

$$R_{32} = \frac{c}{b} \geq 1. \quad (58)$$

Considerando-se as dimensões do esferoide prolato conforme apresentadas na Tabela 2.3, obtêm-se os valores apresentados nas equações (59) e (60).

$$R_{21} = 1, \quad (59)$$

$$R_{32} = 7. \quad (60)$$

Assim, obtém-se um valor aproximado para  $G$ , que é apresentado na equação (61).

$$G = 2,14. \quad (61)$$

A Tabela 2.7 apresenta os valores encontrados para as variáveis apresentadas nesta seção considerando-se um regime de escoamento puramente laminar.

Tabela 2.7 - Coeficientes associados à fricção superficial e ao arrasto axial.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	DESCRIÇÃO
$G$	2,14	-	Índice geométrico do corpo rígido
$l$	$1,350 \times 10^{-1}$	m	Comprimento Característico
$Re$ (1 m/s)	$1,135 \times 10^5$	-	Número de <i>Reynolds</i> para $V = 1$ m/s
$Re$ (2 m/s)	$2,269 \times 10^5$	-	Número de <i>Reynolds</i> para $V = 2$ m/s
$C_f$ (1 m/s)	$3,900 \times 10^{-3}$	-	Coefficiente de Fricção Superficial para $V = 1$ m/s

$C_f$ (2 m/s)	$2,700 \times 10^{-3}$	-	Coefficiente de Fricção Superficial para $V = 2$ m/s
$C_d$ (1 m/s)	$1,791 \times 10^{-1}$	-	Coefficiente de Arrasto Axial para $V = 1$ m/s
$C_d$ (2 m/s)	$1,451 \times 10^{-1}$	-	Coefficiente de Arrasto Axial para $V = 2$ m/s

### 2.6.3.3 Arrasto Cruzado

Segundo PRESTERO (2001), o arrasto cruzado do veículo submarino pode ser considerado como a soma do arrasto cruzado do casco e o arrasto cruzado das aletas. O método para o cálculo do arrasto cruzado do casco consiste em aproximá-lo à soma dos arrastos sofridos por cilindros cuja seção transversal corresponde à seção transversal do casco. A Figura 2-9 ilustra essa relação entre os cilindros e a seção transversal do casco.

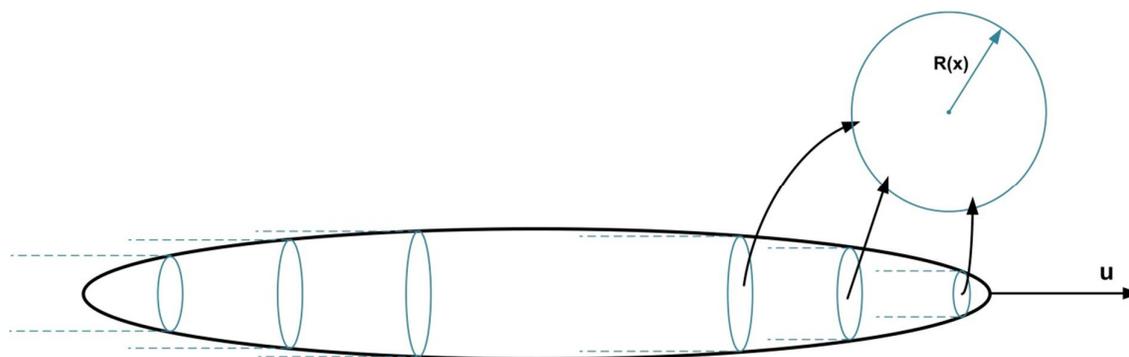


Figura 2-9 - Ilustração do cálculo do arrasto cruzado do casco.

Desta forma, integra-se o arrasto cruzado do cilindro, que é função de  $R(x)$ , ao longo do comprimento do veículo submarino para se obter o arrasto cruzado do casco. A depender do termo a ser calculado ( $Y_{v|v|}$ ,  $M_{w|w|}$ ,  $Z_{q|q|}$ , etc.), o cilindro possui um cálculo diferente para o arrasto cruzado.

A equação (62) exhibe o cálculo dos arrastos cruzados. Note que cada um dos arrastos é composto por duas parcelas: a primeira referente ao arrasto cruzado do casco; e a segunda referente ao arrasto cruzado das aletas.

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{v|v} = Z_{w|w} = -\frac{1}{2}\rho c_{dc} \int_{-l/2}^{l/2} 2R(x)dx - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\rho S_{fin}c_{df}\right), \\ M_{w|w} = -N_{v|v} = \frac{1}{2}\rho c_{dc} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2xR(x)dx - 2x_{fin} \cdot \left(\frac{1}{2}\rho S_{fin}c_{df}\right), \\ Y_{r|r} = -Z_{q|q} = -\frac{1}{2}\rho c_{dc} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2x|x|R(x)dx - 2x_{fin}|x_{fin}| \cdot \left(\frac{1}{2}\rho S_{fin}c_{df}\right), \\ M_{q|q} = N_{r|r} = -\frac{1}{2}\rho c_{dc} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2x^3R(x)dx - 2x_{fin}^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\rho S_{fin}c_{df}\right). \end{array} \right. \quad (62)$$

sendo  $\rho$  a densidade do fluido (água do mar, ver Tabela 2.4),  $c_{dc}$  o coeficiente de arrasto de um cilindro,  $l$  o comprimento do veículo submarino (ver Tabela 2.2),  $R(x)$  o raio do casco como função da posição axial (ver equação (4)),  $S_{fin}$  a área do leme de controle (ver Tabela 2.3),  $c_{df}$  o coeficiente de arrasto cruzado e  $x_{fin}$  a coordenada axial do lado vertical da aleta (ver Tabela 2.3).

O coeficiente de arrasto do cilindro ( $c_{dc}$ ), de acordo com HOERNER (1965) *apud* PRESTERO (2001), é aproximadamente igual a 1,1.

O coeficiente de arrasto cruzado ( $c_{df}$ ), de acordo com WHICKER e FEHLNER (1958) *apud* PRESTERO (2001), pode ser calculado através da relação (63).

$$c_{df} = 0,1 + 0,7t, \quad (63)$$

sendo  $t$  a relação entre as larguras da parte superior e inferior da aleta ao longo do eixo longitudinal do veículo.

Os valores encontrados para os arrastos cruzados ( $Y_{v|v}$ ,  $Z_{w|w}$ ,  $M_{w|w}$ ,  $N_{v|v}$ ,  $Y_{r|r}$ ,  $Z_{q|q}$ ,  $M_{q|q}$  e  $N_{r|r}$ ) são apresentados na Tabela 2.8.

#### 2.6.3.4 Arrasto por Rolamento

De acordo com PRESTERO (2001), o arrasto por rolamento pode ser aproximado pela equação (64).

$$K_{p|p} = Y_{vvf}r_{mean}^3, \quad (64)$$

sendo  $Y_{vvf}$  a componente relativa às aletas no arrasto cruzado ( $\rho S_{fin}c_{df}$ ) e  $r_{mean}$  a distância média da aleta para o eixo axial do veículo.

Por fim, o valor encontrado para o arrasto por rolamento ( $K_{p|p|}$ ) é exibido na Tabela 2.8.

### 2.6.3.5 Valores Calculados

A partir das equações apresentadas nas seções 2.6.3.1, 2.6.3 e 2.6.3.4, os derivativos hidrodinâmicos de 2ª ordem foram calculados e são apresentados na Tabela 2.8.

Tabela 2.8 - Derivativos hidrodinâmicos de 2ª ordem.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	OBSERVAÇÃO
$X_{u u }$ (1 m/s)	-6,325	$kg/m$	Valor encontrado para $V = 1$ m/s
$X_{u u }$ (2 m/s)	-5,123	$kg/m$	Valor encontrado para $V = 2$ m/s
$Y_{v v }$	$-2,826 \times 10^2$	$kg/m$	
$Y_{r r }$	9,820	$kg \cdot m/rad^2$	
$Z_{w w }$	$-2,826 \times 10^2$	$kg/m$	
$Z_{q q }$	-9,820	$kg \cdot m^2/rad^2$	
$K_{p p }$	-8,953	$kg \cdot m^2/rad^2$	
$M_{q q }$	9,427	$kg \cdot m^2/rad^2$	
$M_{w w }$	$1,023 \times 10^1$	$kg$	
$N_{r r }$	9,427	$kg \cdot m^2/rad^2$	
$N_{v v }$	$-1,023 \times 10^1$	$kg$	

## 2.7 PROPRIEDADES IMPORTANTES DO MODELO

Com base nas propriedades apresentadas nas equações (16) e (29), pode-se concluir que as propriedades apresentadas na equação (65) também são válidas.

$$\begin{cases} M = M^T, \\ M > 0, \\ \dot{M} = 0. \end{cases} \quad (65)$$

De forma análoga, devido às propriedades apresentadas nas equações (18) e (34), pode-se concluir que as propriedades apresentadas na equação (66) também são válidas.

$$\begin{cases} C = -C^T, \\ x^T C x = 0. \end{cases} \quad (66)$$

### 3 ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

A teoria de estabilidade de *Lyapunov* visa analisar a estabilidade do sistema ao redor dos pontos de equilíbrio do sistema. Um ponto de equilíbrio é estável se todas as soluções na sua vizinhança permanecerem numa vizinhança próxima; caso contrário ele é dito instável. Um ponto de equilíbrio é dito assintoticamente estável se todas as soluções na sua vizinhança, além de permanecerem numa vizinhança próxima, também tenderem a ir para o ponto de equilíbrio na medida em que o tempo se aproxima do infinito (KHALIL, 2002).

A análise de *Lyapunov* mostra-se particularmente interessante para realizar a análise de estabilidade para sistemas não lineares, uma vez que as técnicas tradicionais, como análise de polos ou *Routh-Hurwitz*, aplicam-se apenas a sistemas lineares (FOSSSEN, 1994).

Antes de se apresentar os fundamentos da teoria de *Lyapunov*, faz-se necessário definir dois conceitos importantes: sistemas autônomos e não autônomos.

Um sistema do tipo

$$y = f(x) \tag{67}$$

é dito autônomo, ou invariante no tempo, pois a função  $f$  não depende explicitamente do tempo (KHALIL, 2002). Desta forma, ao se realizar um deslocamento no tempo, a dinâmica do sistema não se altera. Por outro lado, o sistema não autônomo, ou variante no tempo, é aquele cuja dinâmica depende explicitamente do tempo (KHALIL, 2002), ou seja

$$y = f(x, t) \tag{68}$$

#### 3.1 SISTEMAS AUTÔNOMOS

A análise de estabilidade de um veículo submarino tem por finalidade verificar a sua capacidade de retornar ao estado anterior uma vez submetido a uma perturbação, ou seja, garantir que o sistema seja assintoticamente estável. Para fins de robustez, o ideal é que essa estabilidade seja garantida globalmente. No caso de sistemas autônomos, uma técnica utilizada para verificar a estabilidade global assintótica de sistemas não lineares é o método direto de *Lyapunov*, que é apresentado nesta seção (FOSSSEN, 1994).

Para iniciar a análise de estabilidade de *Lyapunov*, uma função escalar  $V(x)$ , chamada de candidata de *Lyapunov*, deve ser escolhida. Para sistemas físicos, essa função geralmente representa a energia do sistema (cinética e/ou potencial). Uma vez determinada essa função

candidata, o seguinte teorema analisa a estabilidade global assintótica do sistema (KHALIL, 2002):

### TEOREMA

Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema. Seja  $V : R^n \rightarrow R$  uma função candidata de Lyapunov com a primeira derivada contínua de forma que:

$$V(0) = 0, \tag{69}$$

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ (Definida Positiva)}, \tag{70}$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \text{ (Ilimitada Radialmente)}, \tag{71}$$

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0 \text{ (Definida Negativa)}, \tag{72}$$

então,  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

É importante notar que esse teorema também é válido para outros pontos de equilíbrio que não  $x = 0$ . Para aplicar o teorema bastaria realizar uma transformação de variáveis de modo que para a nova variável o ponto de equilíbrio fosse nulo. Em outras palavras, supondo que um sistema possui um ponto de equilíbrio  $x = b$ , pode-se realizar a transformação de variável do tipo  $z = x - b$ , e assim, a nova variável terá como ponto de equilíbrio  $z = 0$  (KHALIL, 2002).

## 3.2 SISTEMAS NÃO-AUTÔNOMOS

O método direto de *Lyapunov*, descrito no item 3.1, somente é válido para sistemas autônomos (LYAPUNOV, 1907 *apud* FOSSEN, 1994).

Uma solução para a análise de estabilidade para sistemas não autônomos é o *Lyapunov-Like Theory*, proposto em POPOV, 1973 *apud* FOSSEN (1994), e que se baseia nos resultados apresentados pelo lema de *Barbalat* (BARBALAT, 1959 *apud* FOSSEN, 1994). Entretanto, este teorema garante apenas a convergência da trajetória do sistema para a origem. Ou seja, em um tempo finito, essa trajetória pode afastar-se indefinidamente da origem antes de convergir para o mesmo ponto. Desta forma, a origem é instável no sentido de *Lyapunov*, embora haja a convergência do estado. Ainda assim, o teorema tem se mostrado aplicável do ponto de vista da engenharia (FOSSEN, 1994).

Segundo a teoria de *Lyapunov-Like*, se as condições (73), (74) e (75) forem satisfeitas.

$$V(x, t) \text{ é limitada inferiormente,} \quad (73)$$

$$\dot{V}(x) \text{ é semi - definida negativa,} \quad (74)$$

$$\dot{V}(x) \text{ é uniformemente contínua no tempo,} \quad (75)$$

então:

$$\dot{V}(x, t) \rightarrow 0 \text{ na medida em que } t \rightarrow \infty. \quad (76)$$

Uma condição suficiente para que  $V(x, t)$  seja limitada inferiormente é que  $V(x, t)$  seja semi-definida positiva (FOSSSEN, 1994), conforme é exibido na equação (77).

$$V(x, t) \geq 0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (77)$$

Quanto à condição apresentada na equação (75), ela é satisfeita se a condição (78) for verdadeira (FOSSSEN, 1994).

$$\dot{V}(x, t) \text{ é limitada para } \forall t \geq t_0. \quad (78)$$

### 3.3 ESTABILIDADE DE VEÍCULOS SUBMARINOS

Nesta seção será analisada a estabilidade do veículo submarino para o cenário em que os controles variam ao longo do tempo. Neste cenário, a propulsão e a posição das aletas são variadas no intuito de guiar o veículo submarino de acordo com uma referência prevista, seja ela velocidade ou posição. Uma vez que a propulsão e a posição das aletas são alteradas, a dinâmica do sistema é alterada ao longo do tempo, caracterizando-o como um sistema não autônomo.

A análise de estabilidade neste cenário será realizada através do método *Lyapunov-Like*, apresentando na seção 3.2, e tomando-se como base o que foi apresentado em FOSSSEN (1994).

Primeiro, é necessário definir a variável de erro apresentada na equação (79) (FOSSSEN, 1994).

$$\tilde{v} = v - v_d \quad (79)$$

sendo  $v$  o vetor de velocidade real do veículo e  $v_d$  o vetor de velocidade desejado. A candidata de *Lyapunov* escolhida é definida positiva e pode ser interpretada como a energia pseudo-

cinética do veículo, uma vez que ela se dá em termos do erro de velocidade e não da velocidade propriamente dita. A candidata de *Lyapunov* é apresentada na equação (80) (FOSSSEN, 1994).

$$V = \frac{1}{2} \tilde{v}^T M \tilde{v} \quad (80)$$

O próximo passo é analisar a primeira derivada da candidata de *Lyapunov*, que é apresentada na equação (81).

$$\dot{V} = \tilde{v}^T M \dot{\tilde{v}} = \tilde{v}^T (M\dot{v} - M\dot{v}_d) \quad (81)$$

A partir da equação de movimento do veículo, apresentada na equação (23), pode-se obter a relação apresentada na equação (82).

$$M\dot{v} = \tau - C(v)(\tilde{v} + v_d) - D(v)(\tilde{v} + v_d) - g(\eta) \quad (82)$$

Substituindo-se a equação (82) na equação (81), obtém-se a expressão (83).

$$\dot{V} = \tilde{v}^T (\tau - C(v)(\tilde{v} + v_d) - D(v)(\tilde{v} + v_d) - g(\eta) - M\dot{v}_d) \quad (83)$$

Porém, conforme a segunda propriedade antissimétrica apresentada na equação (66), o termo (84) é nulo.

$$\tilde{v}^T C(v) \tilde{v} = 0 \quad (84)$$

Manipulando-se a equação (83) e levando-se em consideração a expressão (84), obtém-se equação (85).

$$\dot{V} = \tilde{v}^T (\tau - M\dot{v}_d - C(v)v_d - D(v)v_d - g(\eta)) - \tilde{v}^T D(v) \tilde{v} \quad (85)$$

Desta forma, pode-se escolher uma lei de controle de modo que  $\dot{V}$  seja definida negativa, conforme apresentado na expressão (86) (FOSSSEN, 1994).

$$\tau = M\dot{v}_d + C(v)v_d + D(v)v_d + g(\eta) - k_d \tilde{v} \quad (86)$$

sendo  $k_d$  uma matriz definida positiva que contém os ganhos para realizar a sintonia do controlador. Substituindo-se a lei de controle (86) em (85), chega-se a expressão (87).

$$\dot{V} = -\tilde{v}^T [k_d + D(v)] \tilde{v} \leq 0 \quad (87)$$

Conforme apresentado na equação (35),  $D(v)$  é uma matriz definida positiva, assim como  $k_d$ , e, portanto,  $\dot{V}$  é semi-definida negativa. Note que,  $\dot{V} \leq 0$  implica em  $V(t) \leq V(0) \forall t \geq 0$ , e portanto,  $\tilde{v}$  é limitada. Isto, por sua vez, implica em  $\ddot{V}$  ser também limitada, ou seja,  $\dot{V}$  é uniformemente contínua, e o teorema de *Lyapunov-Like* é satisfeito, garantindo assim a estabilidade do sistema.

Assim, de acordo com as condições apresentadas em 3.2, a propriedade (88) é verificada.

$$\dot{V} \rightarrow 0 \tag{88}$$

Isto, por sua vez, garante que a propriedade (89) seja também válida.

$$\tilde{v} \rightarrow 0 \text{ na medida que } t \rightarrow \infty \tag{89}$$

Neste trabalho, a lei de controle apresentada em (86) definirá o controlador de *Lyapunov*.

## 4 MALHA DE CONTROLE

A malha de controle do veículo submarino é apresentada na Figura 4-1. No capítulo 2 descreveu-se todo os procedimentos e cálculos necessários para determinar um modelo matemático que representasse a dinâmica do movimento do veículo submarino, porém, não entrou-se no mérito de modelar a dinâmica dos atuadores (propulsor e aletas), que será realizada no capítulo 4.1.1.

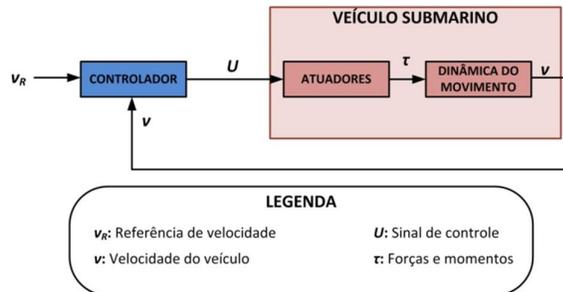


Figura 4-1 - Malha de controle do veículo submarino.

No capítulo 3.3, por sua vez, apresentou-se a lei de controle baseada na teoria de *Lyapunov*. Porém, esta lei foi definida em termos do vetor de forças e momentos ( $\tau$ ), e não de sinal de controle ( $U$ ). Desta forma, é necessário realizar uma transformação levando-se em conta a dinâmica dos atuadores para que o vetor de forças e momentos desejados ( $\tau_V$ ), que é calculado de acordo com a equação (86), seja igual ao vetor de forças e momentos real ( $\tau_R$ ). Essa transformação é aqui chamada de alocação de controle e pode ser melhor visualizada na Figura 4-2.

Note que a alocação de controle transforma o vetor  $\tau_R$  em um vetor de controle  $U$  que, por sua vez, é aplicado aos atuadores. A determinação da alocação de controle será abordada mais profundamente no capítulo 4.1.2.

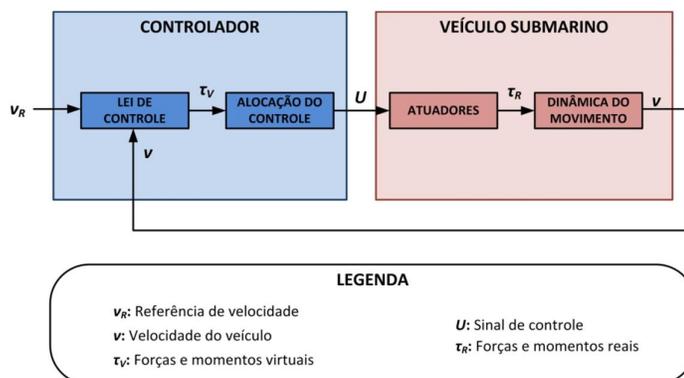


Figura 4-2 - Alocação de controle.

#### 4.1.1 DINÂMICA DOS ATUADORES

Nesta seção serão apresentados os modelos matemáticos que aproximam a relação entre o sinal de controle e as respostas dos atuadores.

##### 4.1.1.1 PROPULSOR

De acordo com FOSSEN (1994), a força de impulso associada ao propulsor pode ser expressa através da relação (90).

$$X = \rho D^4 K_T(J_0) |n| n \quad (90)$$

sendo  $\rho$  a densidade da água do mar,  $D$  o diâmetro do propulsor (adotado valor similar ao de PHILLIPS, 2008),  $K_T(J_0)$  o coeficiente de propulsão,  $J_0$  o número de avanço (do inglês, *advance number*) e  $n$  a velocidade angular do propulsor. Conforme mencionado em 2.2.3, a dinâmica do motor do propulsor foi desconsiderada, pois esta é muito mais rápida que a dinâmica do próprio veículo submarino. Desta forma, a velocidade angular do propulsor ( $n$ ) será considerada o próprio sinal de controle enviado ao propulsor ( $U_x$ ).

O valor de  $J_0$  pode ser calculado conforme é apresentado na equação (91) (FOSSEN, 1994).

$$J_0 = \frac{V_a}{nD} \quad (91)$$

Sendo  $V_a$  a velocidade de avanço no propulsor (velocidade em que a água entra no propulsor) e  $n$  a velocidade de revolução do propulsor.

O coeficiente de propulsão ( $K_T$ ), por sua vez, é uma função não linear de quatro quadrantes, conforme apresentado na Figura 4-3.

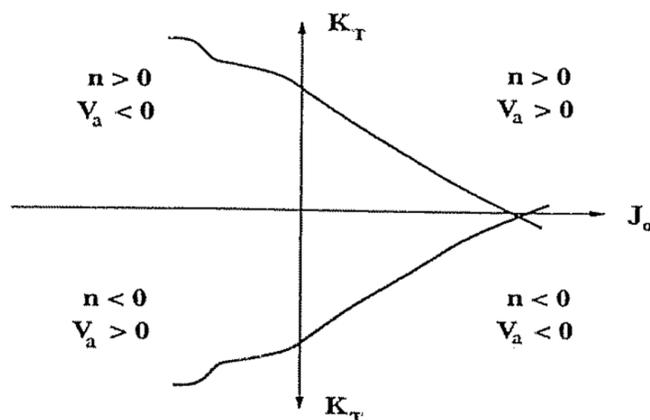


Figura 4-3 - Curvas não lineares do coeficiente de propulsão (FOSSSEN, 1994).

Na Figura 4-3 é possível verificar que para o primeiro e quarto quadrantes a relação entre o coeficiente de propulsão e o número de avanço é aproximadamente linear. O primeiro quadrante, conforme pode ser visto na Figura 4-4, corresponde a uma velocidade positiva em *surge* com força propulsora positiva, ou seja, a operação normal do veículo submarino.

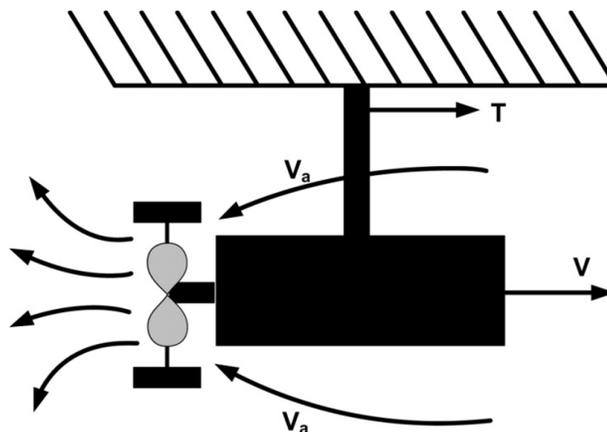


Figura 4-4 - Deslocamento com velocidade e força propulsora positivas (Adaptado de FOSSSEN, 1994).

Neste trabalho será considerado que o veículo desloca-se apenas desta forma. Em FOSSSEN (1991), foi levantada a curva do veículo deslocando-se sob estas condições através de um experimento em mar aberto, conforme apresentado na Figura 4-5.

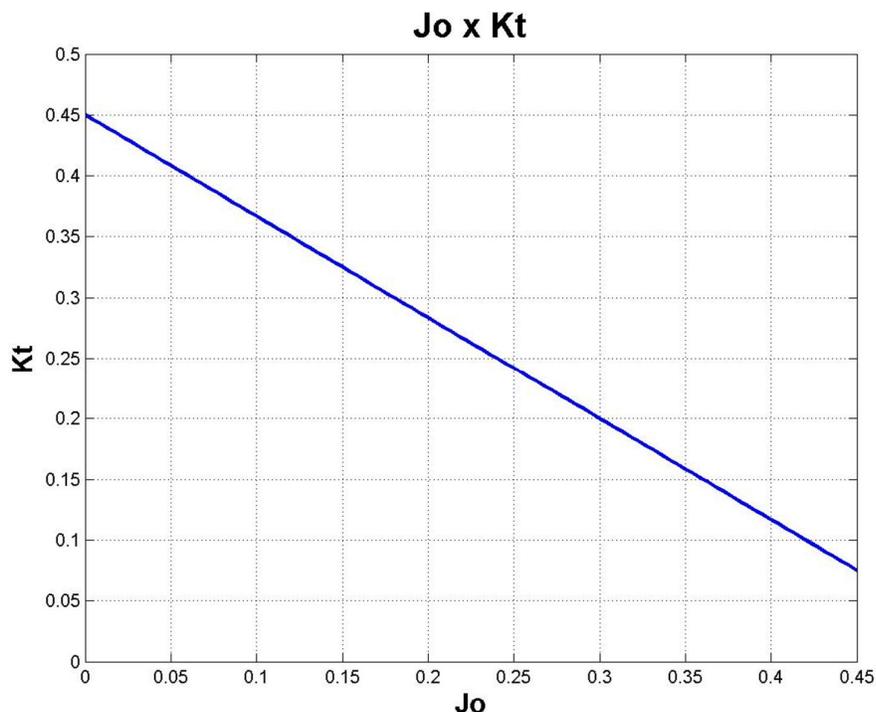


Figura 4-5 - Coeficiente de propulsão versus número de avanço (Adaptado de FOSSEN, 1991).

Assim, a curva apresentada na Figura 4-5 pode ser aproximada por uma equação de primeira ordem na forma apresentada na equação (92).

$$K_T = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{V_a}{nD} \quad (92)$$

Os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  foram calculados e são apresentados na Tabela 4.1. O valor de  $V_a$ , por sua vez, está relacionado com a velocidade de deslocamento do veículo, conforme apresentado na equação (93) (FOSSEN, 1994).

$$V_a = (1 - w)u \quad (93)$$

sendo  $w$  o *wake fraction number*, tipicamente entre 0,1 ~ 0,4 (FOSSEN, 1994), e  $u$  a velocidade em *surge* do veículo. Em PHILLIPS (2008), são realizados testes experimentais que permitiram calcular valores para o *wake fraction number* em diferentes cenários. Este trabalho adotou um valor para  $w$  igual a 0,18, após observar os resultados obtidos para o *Autosub 3* em PHILLIPS (2008).

Por fim, a dinâmica de propulsão pode ser escrita conforme é exibido na equação

(94).

$$X = \rho D^4 |U_x| U_x \cdot \left( \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \left( \frac{(1-w)u}{U_x D} \right) \right) \quad (94)$$

Ou então, segregando a equação em duas componentes, conforme é apresentado na equação (95).

$$X = \rho D^4 |U_x| \alpha_1 U_x + \rho D^3 |U_x| \alpha_2 (1-w)u \quad (95)$$

Os valores dos parâmetros da equação (95) são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros associados à dinâmica do propulsor.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	DESCRIÇÃO
$\rho$	999,10	$kg/m^3$	Densidade da água
$D$	0,70	$m$	Diâmetro do propulsor
$\alpha_1$	0,45	–	Coefficiente linear de (92)
$\alpha_2$	-0,83	–	Coefficiente angular de (92)
$w$	0,18	–	<i>Wake fraction number</i>

#### 4.1.1.2 ALETAS

De acordo com PRESTERO (2001), as forças e momentos gerados por conta da movimentação das aletas do veículo submarino podem ser calculados conforme é apresentado na equação (96).

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{1}{2} \rho c_{L\alpha} S_{fin} (u^2 \delta_r - uv - x_{fin}(ur)), \\ Z = -\frac{1}{2} \rho c_{L\alpha} S_{fin} (u^2 \delta_s + uw - x_{fin}(uq)), \\ M = \frac{1}{2} \rho c_{L\alpha} S_{fin} x_{fin} (u^2 \delta_s + uw - x_{fin}(uq)), \\ N = \frac{1}{2} \rho c_{L\alpha} S_{fin} x_{fin} (u^2 \delta_r - uv - x_{fin}(ur)). \end{array} \right. \quad (96)$$

sendo:

- $\rho$ , a densidade do fluido que cerca o corpo rígido (água do mar), apresentada na Tabela 2.4;

- $c_{L\alpha}$ , o coeficiente de elevação da aleta (do inglês, *fin lift coefficient*), que pode ser calculado conforme a equação (97);
- $S_{fin}$ , a área plana da aleta, apresentada na Tabela 2.3;
- $\delta_r$ , o ângulo das aletas verticais (plano XY), conforme apresentado na Figura 4-6, em radianos;
- $\delta_s$ , o ângulo das aletas horizontais (plano XZ), conforme apresentado na Figura 4-7, em radianos;
- $x_{fin}$ , a coordenada axial do lado vertical da aleta em metros, apresentada na Tabela 2.3.

Em PRESTERO (2001) o ângulo máximo de movimento das aletas ( $\delta_{r_{max}}$  e  $\delta_{s_{max}}$ ) foi fixado em  $13,6^\circ$ . Neste trabalho, foi adotado o mesmo valor, conforme é apresentado na Tabela 4.2.

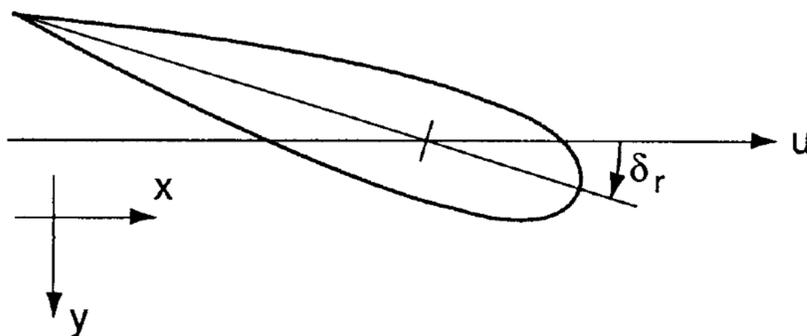


Figura 4-6 - Ilustração do ângulo  $\delta_r$ , (adaptada de PRESTERO, 2001).

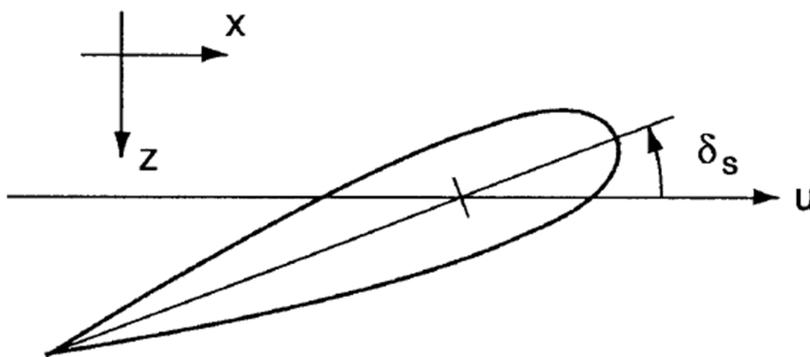


Figura 4-7 - Ilustração do ângulo  $\delta_s$ , (adaptada de PRESTERO, 2001).

O coeficiente de elevação das aletas ( $c_{L\alpha}$ ) pode ser calculado conforme a equação empírica (97) (HOERNER, 1965 *apud* PRESTERO, 2001).

$$c_{L\alpha} = \left[ \frac{1}{2\bar{\alpha}\pi} + \frac{1}{\pi(AR_e)} \right]^{-1} \quad (97)$$

sendo que o fato  $\bar{\alpha}$  foi determinado por HOERNER (1965) *apud* PRESTERO (2001) como sendo igual a 0,9, e  $(AR_e)$  é a razão de aspecto das aletas, que podem ser calculadas pela equação (98) (PRESTERO, 2001).

$$AR_e = 2AR = 2 \left( \frac{b_{fin}^2}{S_{fin}} \right) \quad (98)$$

sendo  $b_{fin}$  a distância entre as extremidades das aletas pertencentes ao mesmo plano.

O valor dos parâmetros referentes à dinâmica das aletas são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Parâmetros associados à dinâmica das aletas.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE	DESCRIÇÃO
$\delta_{rmax}$	13,6	°	Ângulo máximo de movimento da aleta vertical
$\delta_{smax}$	13,6	°	Ângulo máximo de movimento da aleta horizontal
$\bar{\alpha}$	0,9	–	Fator para cálculo de $c_{L\alpha}$
$AR_e$	21,16	–	Razão de aspecto das aletas
$b_{fin}$	0,44	m	Distância entre as extremidades das aletas pertencentes ao mesmo plano
$c_{L\alpha}$	5,22	-	Coefficiente de elevação das aletas

As equações apresentadas em (96) podem se reorganizadas para o formato apresentado na equação (99).

$$\begin{cases} Y = Y_{uu\delta r} u^2 \delta_r + Y_{uvf} uv + Y_{urf} ur \\ Z = Z_{uu\delta s} u^2 \delta_s + Z_{uwf} uw + Z_{uqf} uq \\ M = M_{uu\delta s} u^2 \delta_s + M_{uwf} uw + M_{uqf} uq \\ N = N_{uu\delta r} u^2 \delta_r + N_{uvf} uv + N_{urf} ur \end{cases} \quad (99)$$

sendo os coeficientes das equações de força apresentados na equação (100) e os coeficientes de momento apresentados na equação (101).

$$\begin{cases} Y_{uu\delta r} = -Y_{uvf} = \frac{1}{2}\rho c_{L\alpha} S_{fin} \\ Z_{uu\delta s} = Z_{uwf} = -\frac{1}{2}\rho c_{L\alpha} S_{fin} \\ Y_{urf} = -Z_{uqf} = -\frac{1}{2}\rho c_{L\alpha} S_{fin} x_{fin} \end{cases} \quad (100)$$

$$\begin{cases} M_{uu\delta s} = M_{uwf} = \frac{1}{2}\rho c_{L\alpha} S_{fin} x_{fin} \\ N_{uu\delta r} = -N_{uvf} = \frac{1}{2}\rho c_{L\alpha} S_{fin} x_{fin} \\ M_{uqf} = N_{urf} = -\frac{1}{2}\rho c_{L\alpha} S_{fin} x_{fin}^2 \end{cases} \quad (101)$$

O valor dos coeficientes apresentados nas equações (100) e (101) são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 - Coeficientes para controle das aletas.

PARÂMETRO	VALOR	UNIDADE
$Y_{uu\delta r}$	$4,764 \times 10^{-1}$	$kg/(m \cdot rad)$
$Y_{uvf}$	$-4,764 \times 10^{-1}$	$kg/m$
$Z_{uu\delta s}$	$-4,764 \times 10^{-1}$	$kg/(m \cdot rad)$
$Z_{uwf}$	$-4,764 \times 10^{-1}$	$kg/m$
$Y_{urf}$	$4,574 \times 10^{-1}$	$kg/rad$
$Z_{uqf}$	$-4,574 \times 10^{-1}$	$kg/rad$
$M_{uu\delta s}$	$-4,574 \times 10^{-1}$	$kg/rad$
$M_{uwf}$	$-4,574 \times 10^{-1}$	$kg$
$N_{uu\delta r}$	$-4,574 \times 10^{-1}$	$kg/rad$
$N_{uvf}$	$4,574 \times 10^{-1}$	$kg$
$M_{uqf}$	$-4,391 \times 10^{-1}$	$kg \cdot m/rad$
$N_{urf}$	$-4,391 \times 10^{-1}$	$kg \cdot m/rad$

### 4.1.2 ALOCAÇÃO DO CONTROLE

A alocação de controle consiste em calcular o vetor de controles  $U$  de forma que o vetor de forças e momentos reais ( $\tau_R$ ) seja igual ao vetor de forças e momentos virtuais ( $\tau_V$ ), que foi previamente calculado pelo controlador. Este vetor de forças e momentos virtuais ( $\tau_V$ ) é calculado com base na teoria de estabilidade de *Lyapunov*, conforme foi apresentado na seção 3.3.

As equações (95) e (99) podem ser representadas em uma forma matricial compacta, conforme apresentado na equação (102).

$$\tau_R = B_1(v, U)U + B_2(v, U)v \quad (102)$$

sendo  $U$  o vetor de controles em *surge* (propulsor), *pitch* (aletas horizontais) e *yaw* (aletas verticais), conforme apresentado na expressão (103).

$$U = [U_x \ \delta_r \ \delta_s]^T \quad (103)$$

$B_1(v, U)$  e  $B_2(v, U)$  são matrizes não lineares, dependentes do vetor de velocidades  $v$  e do vetor de controles  $U$ . A parametrização da matriz  $B_1(v, U)$  é única e é exibida na expressão (104).

$$B_1(v, U) = \begin{bmatrix} \rho D^4 |U_x| \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{uu\delta_r} \cdot u^2 \\ 0 & Z_{uu\delta_s} \cdot u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{uu\delta_s} \cdot u^2 & 0 \\ 0 & 0 & N_{uu\delta_r} \cdot u^2 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Diferentemente de  $B_1(v, U)$ , a parametrização de  $B_2(v, U)$  não é única. A matriz  $B_2(v, U)$  foi montada conforme apresentado na expressão (105).

$$B_2(v, U) = \begin{bmatrix} \rho D^3 |U_x| \alpha_2 (1-w) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{uvf} \cdot u & 0 & 0 & 0 & Y_{urf} \cdot u \\ 0 & 0 & Z_{uwf} \cdot u & 0 & Z_{uqf} \cdot u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{uwf} \cdot u & 0 & M_{uqf} \cdot u & 0 \\ 0 & N_{uvf} \cdot u & 0 & 0 & 0 & N_{urf} \cdot u \end{bmatrix} \quad (105)$$

Com auxílio das equações apresentadas em (100) e (101), pode-se verificar que a matriz  $B_2(v, U)$  é simétrica, e então, a propriedade apresentada na equação (106) é válida.

$$B_2(v, U) = B_2(v, U)^T \quad (106)$$

Com o intuito de se obter a lei de controle que permitirá obter o vetor de forças e momentos desejado, é necessário obter a relação inversa entre  $\tau_R$  e  $U$  a partir da equação (102). Entretanto, conforme pode ser observado na equação (104), a matriz  $B_1(v, U)$  não é quadrada, logo, não possui inversa. Desta forma, é necessário obter a sua pseudo-inversa de *Moore-Penrose* ( $B_1^+$ ) (MIT, 2011), conforme é apresentado na equação (107).

$$B_1^+(v, U) = (B_1^T B_1)^{-1} \cdot B_1^T \quad (107)$$

As propriedades da matriz pseudo-inversa são descritas mais detalhadamente no Apêndice A. Assim, pode-se obter a lei de controle adequada, conforme apresentada na expressão (108).

$$U = B_1^+(\tau_V - B_2 v) \quad (108)$$

Substituindo-se (108) em (102), obtém-se a equação (109).

$$\tau_R = B_1(B_1^+(\tau_V - B_2 v)) + B_2 v \quad (109)$$

A equação (109) pode ser manipulada de tal forma que se encontre a relação expressa na equação (110).

$$\tau_R = B_1 B_1^+ \tau_V + (I - B_1 B_1^+) B_2 v \quad (110)$$

Entretanto, conforme é demonstrado no Apêndice B, o segundo termo da equação (110) é nulo, e, portanto, a equação (110) fica reduzida à expressão (111).

$$\tau_R = B_1 B_1^+ \tau_V \quad (111)$$

Ou então, representando-se os elementos das matrizes, obtém-se a relação (112).

$$\begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_R \\ K_R \\ M_R \\ N_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Y_{uudr}^2}{C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{N_{uudr}Y_{uudr}}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{Z_{uuds}^2}{C_1} & 0 & \frac{M_{uuds}Z_{uuds}}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_{uuds}Z_{uuds}}{C_1} & 0 & \frac{M_{uuds}^2}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{N_{uudr}Y_{uudr}}{C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{N_{uudr}^2}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \\ K_V \\ M_V \\ N_V \end{bmatrix} \quad (112)$$

sendo

$$\begin{cases} C_1 = M_{uuds}^2 + Z_{uuds}^2 \\ C_2 = N_{uudr}^2 + Y_{uudr}^2 \end{cases} \quad (113)$$

Desconsiderando-se as forças e momentos em *heave* ( $Z$ ), *roll* ( $K$ ) e *pitch* ( $M$ ), pois o deslocamento e a perturbação ocorrem apenas no plano horizontal, e realizando-se a multiplicação das matrizes, chega-se ao sistema de equações (114).

$$\begin{cases} X_R = X_V \\ Y_R = G_1 Y_V + G_2 N_V \\ N_R = G_3 Y_V + G_4 N_V \end{cases} \quad (114)$$

sendo

$$\begin{cases} G_1 = \frac{Y_{uudr}^2}{N_{uudr}^2 + Y_{uudr}^2} \\ G_2 = G_3 = \frac{N_{uudr}Y_{uudr}}{N_{uudr}^2 + Y_{uudr}^2} \\ G_4 = \frac{N_{uudr}^2}{N_{uudr}^2 + Y_{uudr}^2} \end{cases} \quad (115)$$

Como pode ser visto na expressão (114), utilizando-se a lei de controle apresentada na equação (108), obtemos uma propulsão real em *surge* ( $X_R$ ) que é igual à propulsão virtual desejada ( $X_V$ ). Por outro lado, o mesmo não ocorre em *sway* ( $Y_R \neq Y_V$ ) e *yaw* ( $N_R \neq N_V$ ).

Considerando-se o sistema de equações apresentado na equação (116), pode-se analisar a possibilidade de se realizar uma parametrização dos valores de  $Y_V$  e  $N_V$  de modo que  $Y_R$  seja igual a  $Y_V$ , e  $N_R$  seja igual a  $N_V$ .

$$\begin{cases} Y_R = G_1 Y_V + G_2 N_V \\ N_R = G_3 Y_V + G_4 N_V \end{cases} \quad (116)$$

Para tanto, definem-se duas novas variáveis,  $Y'_V$  e  $N'_V$ , que estão parametrizadas em relação a  $Y_V$  e  $N_V$ . Além disso, deseja-se satisfazer a relação exposta na expressão (117).

$$\begin{cases} Y_R = Y_V \\ N_R = N_V \end{cases} \quad (117)$$

Dessa forma, o sistema de equações apresentado na expressão (116) pode ser reescrito conforme apresentado na expressão (118).

$$\begin{cases} Y_V = G_1 Y'_V + G_2 N'_V \\ N_V = G_3 Y'_V + G_4 N'_V \end{cases} \quad (118)$$

As soluções para  $Y'_V$  e  $N'_V$  representam a parametrização a ser realizada para satisfazer a expressão (117).

Com base da Regra de *Cramer*, cuja fundamentação teórica é apresentada no Apêndice C, pode-se analisar se o sistema (118) possui uma solução única. Com base nas expressões apresentadas na equação (115), pode-se calcular o valor do determinante  $\Delta$ , conforme apresentado na equação (119).

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix} = G_1 G_4 - G_2 G_3 = 0 \quad (119)$$

Note que, independentemente do valor dos demais determinantes ( $\Delta Y'_V$ ,  $\Delta N'_V$ ), não é possível determinar uma solução única para o sistema, pois  $\Delta = 0$ . Os demais determinantes,  $\Delta Y'_V$  e  $\Delta N'_V$ , são calculados nas equações (120) e (121), respectivamente.

$$\Delta Y'_V = \begin{vmatrix} Y_V & G_2 \\ N_V & G_4 \end{vmatrix} = G_4 Y_V - G_2 N_V \quad (120)$$

$$\Delta N'_V = \begin{vmatrix} G_1 & Y_V \\ G_3 & N_V \end{vmatrix} = G_1 N_V - G_3 Y_V \quad (121)$$

Para que o sistema seja possível, é necessário que  $\Delta Y'_V$  e  $\Delta N'_V$  sejam nulos. Para tanto, com base nas equações (120) e (121), a expressão (122) deve ser satisfeita.

$$\begin{cases} Y_V = \frac{G_2}{G_4} N_V \\ Y_V = \frac{G_3}{G_1} N_V \end{cases} \quad (122)$$

porém:

$$\frac{G_2}{G_4} \neq \frac{G_3}{G_1} \quad (123)$$

Desta forma, os determinantes  $\Delta Y'_V$  e  $\Delta N'_V$  não são nulos e, portanto, o sistema (118) é impossível, ou seja, não tem solução.

Por fim, a relação apresentada na equação (114) será mantida e nenhuma parametrização será realizada.

Os valores dos coeficientes apresentados na expressão (115) são exibidos na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Coeficientes que relacionam forças/momentos reais e virtuais.

<b>PARÂMETRO</b>	<b>VALOR</b>
G1	$5,204 \times 10^{-1}$
G2	$-4,996 \times 10^{-1}$
G3	$-4,996 \times 10^{-1}$
G4	$4,796 \times 10^{-1}$

## 5 AMBIENTE DE SIMULAÇÃO

A malha de controle considerada nas simulações é apresentada na Figura 5-1, e uma breve descrição de cada bloco será realizada nas seções 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.

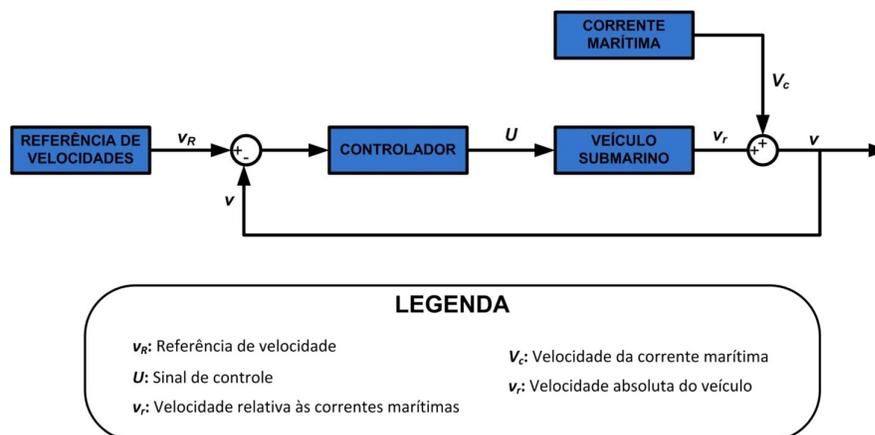


Figura 5-1 - Malha de controle do sistema completo.

### 5.1 REFERÊNCIA DE VELOCIDADES

O modelo considerado para o veículo submarino é baseado no vetor de velocidades representado em coordenadas fixadas no corpo. Desta forma, a fim de avaliar o desempenho dos controladores propostos em 5.2, foi necessário fornecer um vetor com as velocidades de referência. Para tanto, foi utilizado o bloco *Way-Point Guidance*, disponível em MSS (2010), que é capaz de fornecer valores de referência variáveis ao longo do tempo.

A Figura 5-2 exibe um exemplo típico de referência fornecida pelo bloco para as velocidades em *surge* e *yaw*.

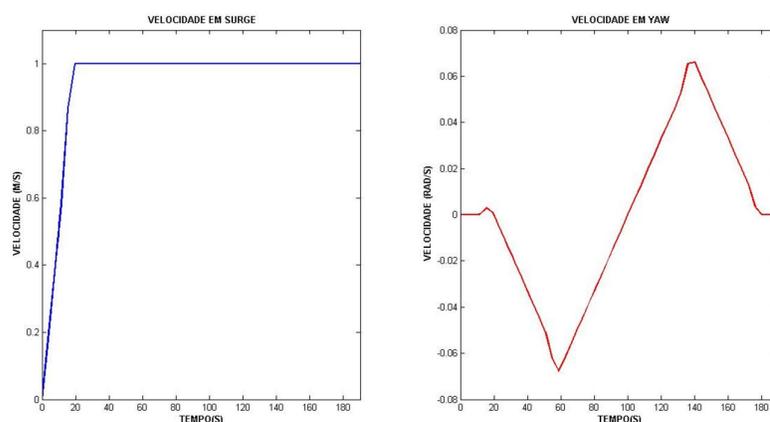


Figura 5-2 - Referências de velocidade em *surge* e *yaw* para uma trajetória em “S”.

Note que, de acordo com a Figura 5-2, a referência em *surge* parte de 0 até chegar a 1 m/s. No caso sem perturbações isso não representava problema algum, porém, no caso em que as correntes marítimas eram inseridas na simulação, isso acabava gerando problemas para o controlador adaptativo, pois acabava saturando o controlador.

Devido às correntes marítimas, a velocidade inicial do veículo submarino é maior que zero e, portanto, superior ao valor inicial de referência. Devido a esse erro, o sinal de controle de *surge* acaba saturando em 0 (zero), o que acabava gerando um sobressalto de sinal quando o valor da referência superava a velocidade real do veículo submarino, conforme pode ser visto na Figura 5-3.

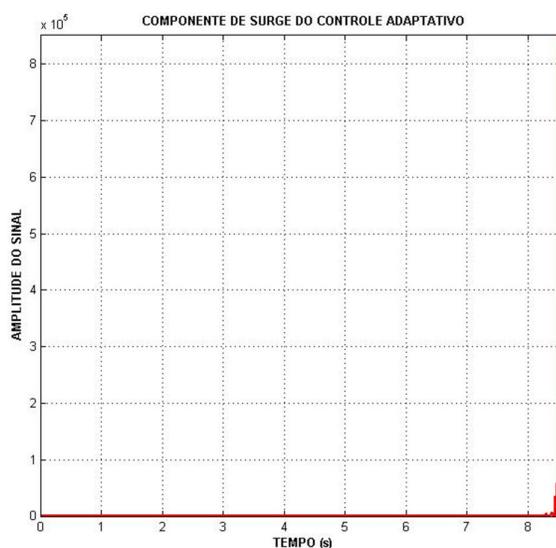


Figura 5-3 - Saturação inicial e conseqüente sobressalto do sinal de *surge*.

No caso do controlador PI essa saturação inicial não representou um problema, pois a utilização de um método *anti-windup*, configurado no próprio bloco “PID”, conseguiu resolver o problema de saturação.

Desta forma, a fim de evitar o problema apresentado na Figura 5-3, a referência em *surge* foi configurada desde o início para ter um valor igual à velocidade de operação, como pode ser vista na Figura 5-4.

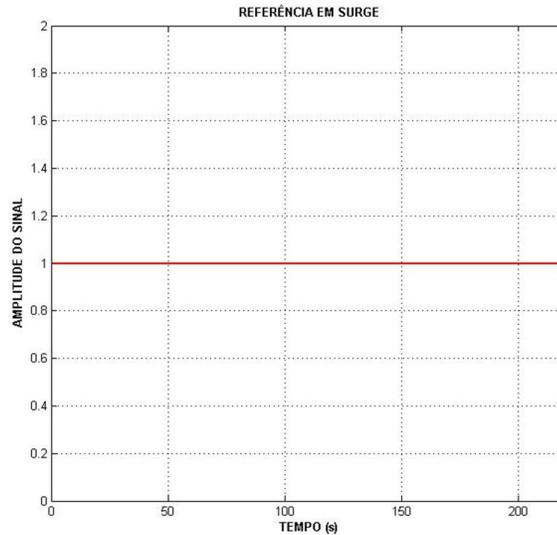


Figura 5-4 - Nova referência em surge.

## 5.2 CONTROLADORES

### 5.2.1 CONTROLADOR ADAPTATIVO

O controlador adaptativo possui, além de blocos auxiliares, dois blocos principais: aquele responsável por calcular o vetor de forças e momentos desejados com base na teoria de *Lyapunov*, cujo cálculo é apresentado seção 3.3; e o bloco de alocação de controle, que transformará o vetor de forças e momentos desejados em um sinal de controle a ser enviado aos atuadores, conforme descrito na seção 4.1.2. A Figura 5-5 exhibe o bloco do controlador adaptativo, enquanto que na Figura 5-6 pode ser vista a estrutura do bloco “TAL VIRTUAL”, que é responsável por calcular o vetor de forças e momentos desejados ( $\tau_V$ ).

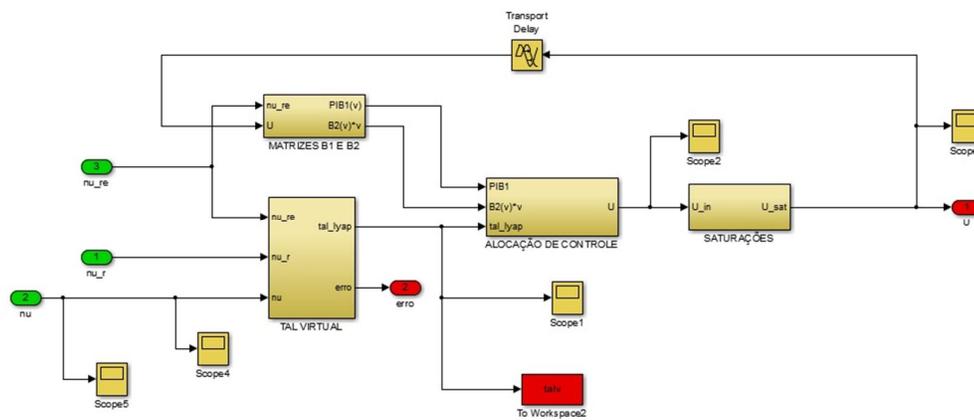


Figura 5-5 - Controlador adaptativo baseado na teoria de *Lyapunov*.

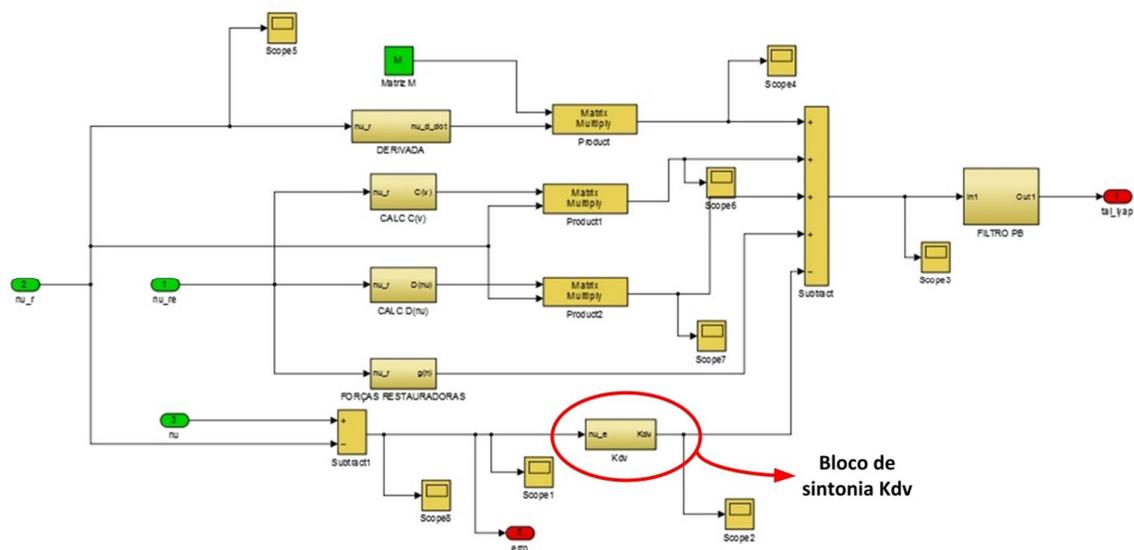


Figura 5-6 - Cálculo do vetor de forças e momentos desejados ( $\tau_v$ ).

A sintonia do controlador adaptativo pode ser realizada através do bloco  $Kdv$ , onde o erro de cada grau de liberdade é submetido a um ganho proporcional invariante. Os ganhos foram ajustados com base nas simulações e, portanto, a sintonia aqui realizada não deve ser considerada ótima.

## 5.2.2 CONTROLADOR PI

Neste trabalho não foram utilizados controladores PID pois, devido aos ruídos que a corrente marítima adicionava ao sistema, o ganho derivativo pioraria o desempenho do controle.

O controlador PI proposto neste trabalho é composto apenas por blocos “PID” em cada um dos graus de liberdade a serem controlados (*surge*, *pitch* e *yaw*). É importante ressaltar que, conforme mencionado na seção 2.2.3, o controle em *pitch* é irrelevante para o propósito deste trabalho, uma vez que o deslocamento do veículo submarino ocorre apenas no plano horizontal. A Figura 5-7 exibe a estrutura do controlador PI.

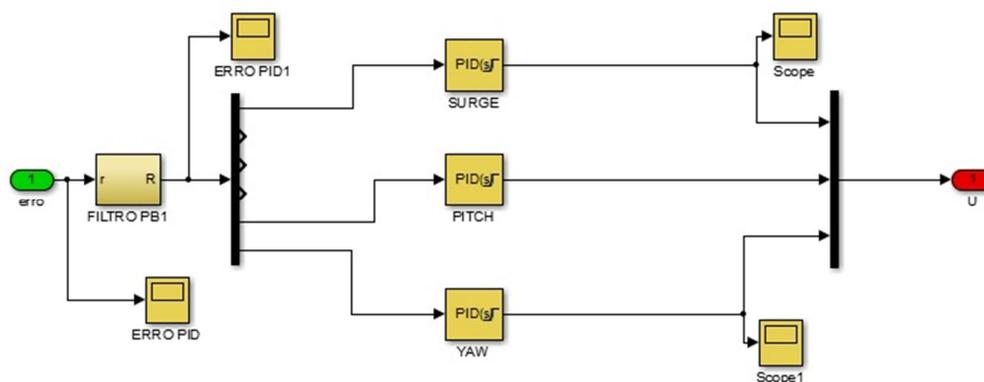


Figura 5-7 - Controlador PI.

Os controladores PI podem ser sintonizados diretamente nos blocos “PID”, que controlam individualmente os graus de *surge*, *pitch* e *yaw*. Esses parâmetros foram ajustados manualmente com base nas simulações e, portanto, a sintonia aqui realizada não deve ser considerada ótima.

### 5.2.3 FILTRO PASSA-BAIXA

Conforme discutido na seção 5.1, a referência em *surge* precisou ser iniciada com a velocidade de operação a fim de evitar problemas de saturação no controlador adaptativo. Ainda assim, a velocidade inicial do veículo em *surge* é diferente do valor de referência, o que acaba gerando um erro diferente de zero logo no início das simulações. Esse erro inicial acabou gerando um sobressalto nos sinais de controle, como pode ser visto na Figura 5-8.

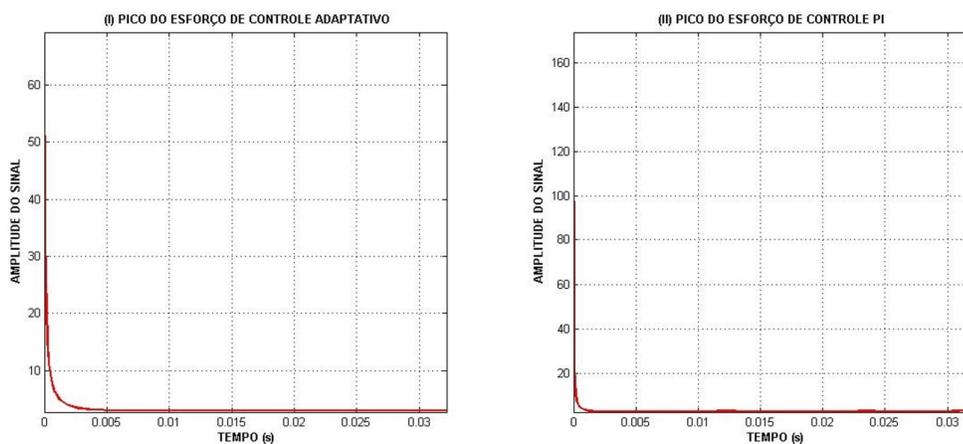


Figura 5-8 – Sobressaltos iniciais: (I) Sinal de controle adaptativo (II) Sinal de controle PI.

No caso do controlador PI, além do sobressalto inicial, o sinal de controle estava ruidoso, devido à influência das correntes marítimas, conforme pode ser observado na Figura 5-9.

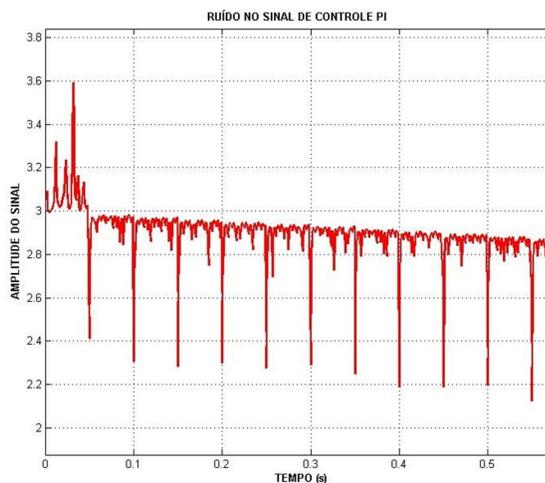


Figura 5-9 – Ruído no sinal de controle PI.

Tanto o sobressalto inicial como o ruído causam danos físicos aos atuadores e, portanto, devem ser evitados. Por conta disso, foi necessário incluir no sistema um filtro passa-baixa a fim de se evitar o pico inicial do sinal de controle e os ruídos no controlador PI. Este filtro foi dimensionado através da observação das simulações e, conforme poderá ser verificado no capítulo 6, os resultados obtidos foram satisfatórios.

### 5.3 VEÍCULO SUBMARINO

Na simulação, a dinâmica dos atuadores e do veículo submarino foi configurada em um único bloco. A Figura 5-10 exibe a estrutura interna desse bloco.

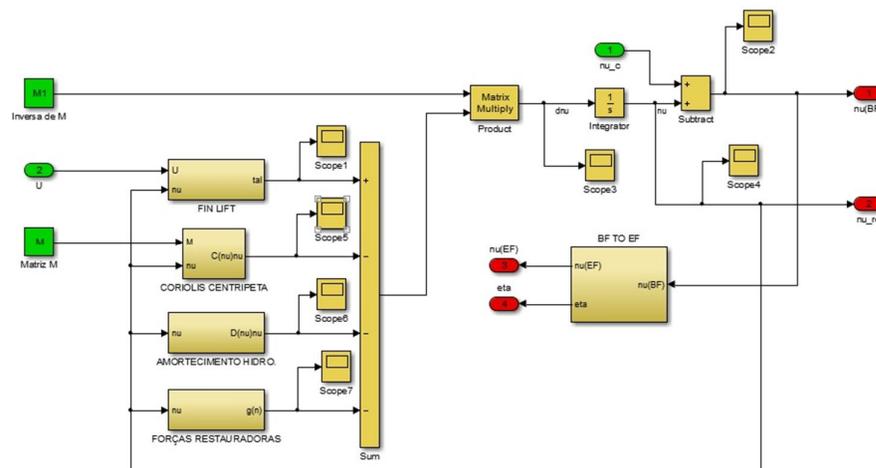


Figura 5-10 - Modelo matemático do veículo submarino.

As simulações do veículo submarino foram realizadas em dois cenários diferentes de velocidade de operação: em um primeiro momento, as simulações foram realizadas para uma velocidade de 1 m/s; em um segundo momento, a velocidade de operação foi alterada para 2 m/s. A sintonia dos controladores foi realizada considerando-se a velocidade de operação de 1 m/s, e o segundo cenário vislumbrava observar o desempenho dos controladores em um outro cenário a fim de avaliar a sua robustez.

## 5.4 CORRENTE MARÍTIMAS

Algumas considerações foram realizadas com relação à simulação das correntes marítimas, conforme são descritas a seguir:

- As correntes marítimas foram consideradas irrotacionais (FOSSEN, 1994) e, portanto, elas possuem apenas coordenadas lineares. Em ambientes não controlados, é importante ter em mente que podem haver outros tipos de perturbação, como vórtices rotacionais e/ou correntes de convecção, que não foram considerados neste trabalho;
- As perturbações geradas pelas correntes marítimas no eixo vertical também foram desconsideradas, pois são desprezíveis, como visto em GARAU (2005).

A perturbação causada pelas correntes marítimas sobre o veículo submarino pode ser entendida como um acréscimo na velocidade de deslocamento do veículo. Assim, a perturbação simulada consistirá em gerar vetores de velocidade em *surge* e *sway* que variam ao longo do tempo. Assumindo-se o modelo irrotacional e sem a componente vertical, a

corrente marítima pode ser representada através do vetor apresentado na expressão (124) (FOSSSEN, 1994) (GARAU, 2005).

$$V_c^E = [u_c^E, v_c^E, 0, 0, 0, 0]^T \quad (124)$$

sendo  $u_c^E$  a sua componente em *surge* (eixo X) e  $v_c^E$  a sua componentes em *sway* (eixo Y).

Este vetor pode ser representado através do seu módulo e ângulo em relação ao eixo X. O ângulo  $\beta$ , que define a direção da corrente resultante, pode ser visto na Figura 5-11.

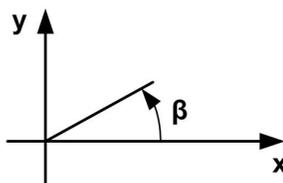


Figura 5-11 - Direção da corrente.

Assim, as componentes da corrente marítima podem ser obtidas de acordo com a relação expressa na equação (125).

$$\begin{cases} u_c^E = |V_c^E| \cdot \cos(\beta) \\ v_c^E = |V_c^E| \cdot \sen(\beta) \end{cases} \quad (125)$$

O vetor apresentado na equação (124) está representado em coordenadas inerciais. Tendo em vista que o modelo utilizado está representado em coordenadas fixadas no corpo, a transformação apresentada na equação (126) deve ser realizada.

$$V_c^B = J(\eta)^{-1} \cdot V_c^E \quad (126)$$

sendo  $J(\eta)$  a matriz de transformação do sistema de coordenadas fixadas no corpo para o sistema de coordenadas inerciais, conforme foi definida no capítulo 2.3.

Neste trabalho, assim como realizado em GARAU (2005), considerou-se que o módulo da corrente marítima deveria variar entre os valores apresentados na inequação (127).

$$0,6 \cdot V_{AUV} \leq |V_c| \leq 0,95 \cdot V_{AUV} \quad (127)$$

sendo  $V_{AUV}$  a velocidade de operação do veículo.

### 5.4.1.1 GERAÇÃO DAS CORRENTES MARÍTIMAS

Segundo FOSSEN (1994), para simulações computacionais a o módulo da corrente marítima pode ser simulada mediante a utilização de um processo de *Gauss-Markov* de 1ª ordem, de acordo com a equação diferencial apresentada na expressão (128).

$$|\dot{V}_c(t)| + \mu_0 |V_c(t)| = w(t) \quad (128)$$

sendo  $w(t)$  um ruído branco Gaussiano de média nula e  $\mu_0 \geq 0$  uma constante. Ainda segundo FOSSEN (1994), pode-se considerar a constante  $\mu_0$  nula, e assim a equação (128) resume-se a um “passeio aleatório” (do inglês, *random walk*), conforme apresentado na equação (129).

$$|\dot{V}_c(t)| = w(t) \quad (129)$$

O método apresentado na expressão (129) pode ser utilizado também para a geração do ângulo  $\beta$ . A Figura 5-12 exibe a estrutura do bloco responsável por gerar as correntes marítimas nas simulações.

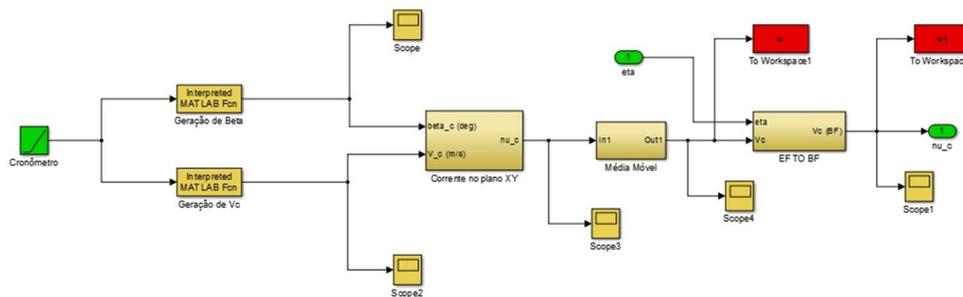


Figura 5-12 - Gerador de correntes marítimas.

A Figura 5-13 exibe as componentes das correntes marítimas geradas.

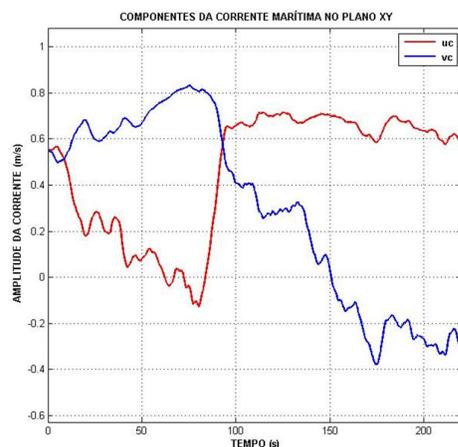


Figura 5-13 - Componentes da corrente marítima.

A Figura 5-14 exibe os campos vetoriais relativos às correntes marítimas apresentadas na Figura 5-13, sendo que os campos correspondem aos instantes  $t = 0$  s e  $t = 220$  s.

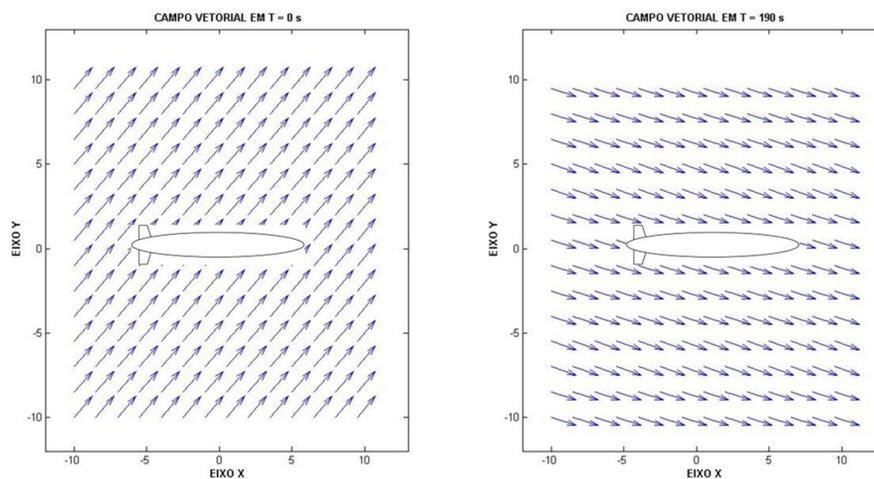


Figura 5-14 - Campo vetorial da corrente marítima no plano XY.

## 6 RESULTADOS

A fim de se verificar o comportamento do sistema diante de perturbações externas, foram realizadas simulações com o veículo submarino submetido a correntes marítimas variáveis no *toolbox Simulink* do MATLAB®.

O comportamento do veículo quando sujeito a correntes marítimas foi analisado para diferentes vetores de referência e diferentes velocidades de operação. É importante salientar que a sintonia dos controladores foi realizada considerando-se a velocidade de operação de 1 m/s, e esta sintonia foi mantida para as simulações com velocidade de operação de 2 m/s.

### 6.1 MÉTRICA DE DESEMPENHO

A fim de avaliar o desempenho dos controladores adaptativo e PI nos diferentes cenários, foi selecionada a métrica de erro quadrático. Nessa métrica é calculado o somatório do erro quadrático existente entre a saída e a referência do sistema para cada instante. A expressão (130) exhibe o cálculo do erro quadrático em *surge* e *yaw*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{surge: } EQS = \sum_{i=1}^{i=k} [u(i) - u_R(i)]^2 \\ \text{yaw: } EQY = \sum_{i=1}^{i=k} [r(i) - r_R(i)]^2 \end{array} \right. \quad (130)$$

sendo

- $u(i)$ , a velocidade real em *surge* no instante  $i$ ;
- $u_R(i)$ , a velocidade de referência em *surge* no instante  $i$ ;
- $r(i)$ , a velocidade real em *yaw* no instante  $i$ ;
- $r_R(i)$ , a velocidade de referência em *yaw* no instante  $i$ ;
- $k$ , o último instante de amostragem da simulação.

Para esta métrica, quão menor for o seu valor, melhor será o desempenho do controlador.

## 6.2 VETORES DE REFERÊNCIAS

O veículo submarino foi submetido a dois vetores de referências de velocidade diferentes. Na primeira referência de velocidade, exibida na Figura 6-1, a trajetória percorrida assemelhava-se a uma curva em “S”, conforme apresentado na Figura 6-2.

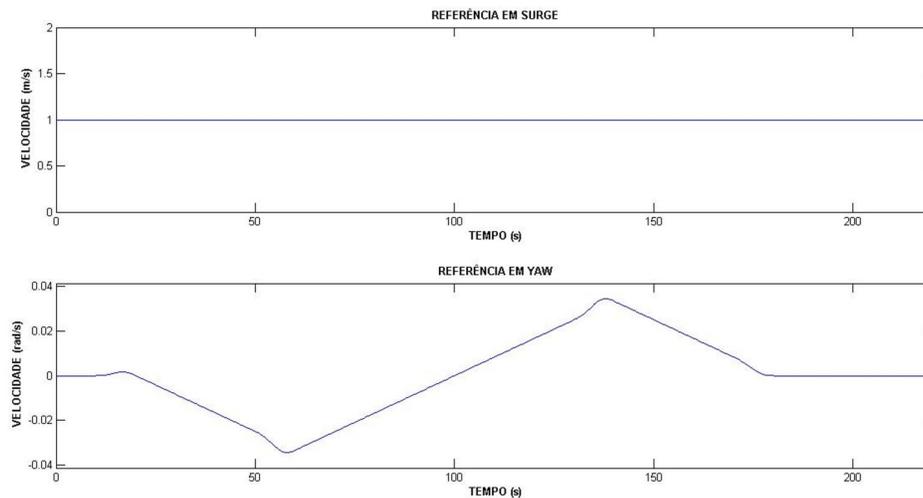


Figura 6-1 - Referência de velocidade para trajetória em "S".

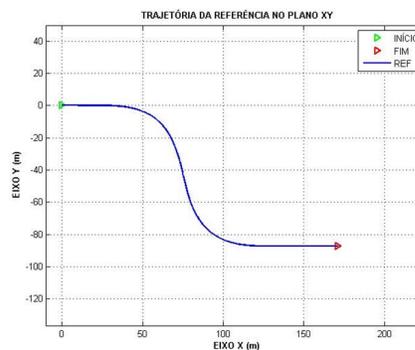


Figura 6-2 – Trajetória em “S” percorrida pela referência de velocidades.

A segunda referência de velocidade, exibida na Figura 6-3, resultaria em uma trajetória em espiral, conforme pode ser visto na Figura 6-4.

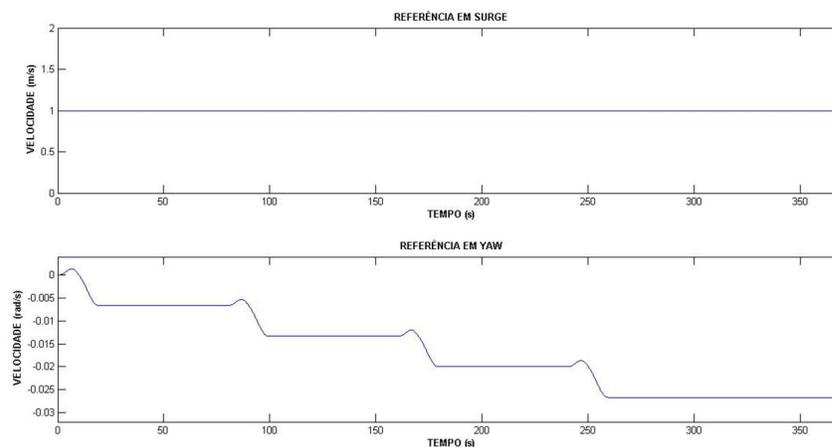


Figura 6-3 - Referência de velocidade para trajetória espiral.

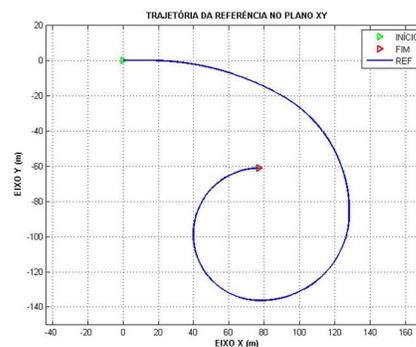


Figura 6-4 – Trajetória em espiral percorrida pela referência de velocidades.

Na ausência de perturbações, espera-se que ambos os controladores consigam seguir a referência satisfatoriamente, descrevendo uma trajetória similar àquelas apresentadas na Figura 6-2 e na Figura 6-4.

Por outro lado, na presença de correntes marítimas, os controladores naturalmente não conseguirão seguir a referência com perfeição e, tendo em vista que a referência se dá em termos de velocidade, o erro de trajetória se acumula ao longo do tempo. Neste caso, espera-se que o controlador adaptativo apresente um melhor desempenho, tendo em vista que o seu projeto fundamenta-se na teoria de estabilidade e, portanto, é de se esperar uma melhor capacidade regulatória.

Essas duas hipóteses serão avaliadas nos itens 6.3.1 e 6.3.2.

## 6.3 CENÁRIO I

Neste cenário será avaliado o desempenho de ambos os controladores para uma velocidade de operação igual a 1 m/s.

### 6.3.1 SISTEMA SEM PERTURBAÇÃO

#### 6.3.1.1 RESPOSTA DO SISTEMA

No caso do primeiro vetor de referências, pode-se observar a trajetória percorrida por ambos os controladores na Figura 6-5. Na Figura 6-6 e na Figura 6-7, por sua vez, são exibidos os gráficos de velocidade para ambos os controladores.

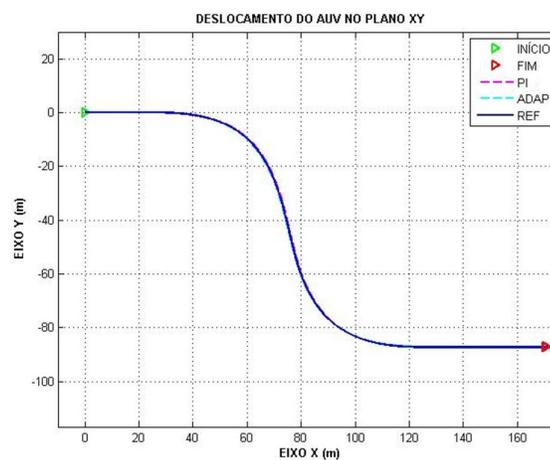


Figura 6-5 - Trajetória percorrida em "S".

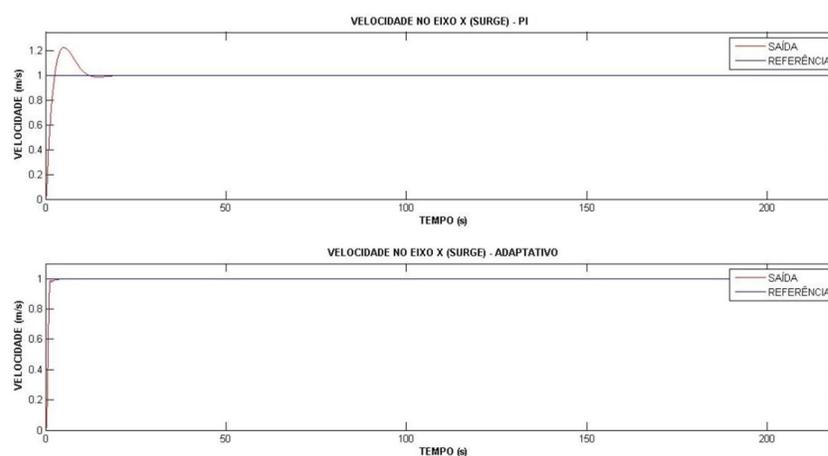


Figura 6-6 - Velocidade em surge para a trajetória em "S".

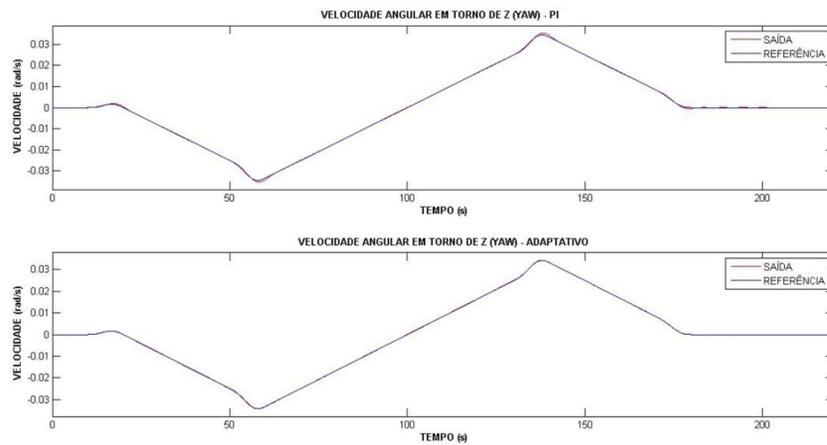


Figura 6-7 - Velocidade em *yaw* para a trajetória em “S”.

No caso do segundo vetor de referências, a trajetória percorrida pelos controladores pode ser vista na Figura 6-8, enquanto que na Figura 6-9 e na Figura 6-10 podem ser vistos os gráficos de velocidade.

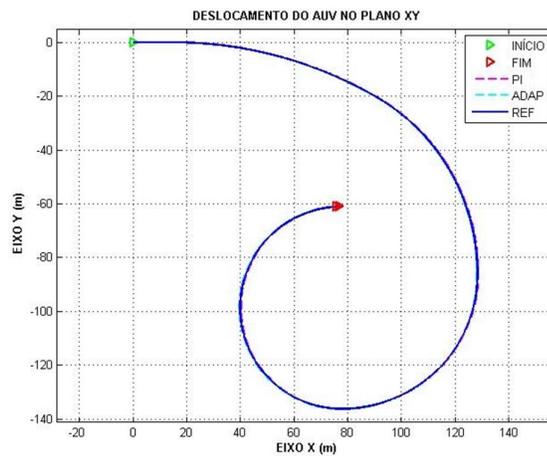


Figura 6-8 - Trajetória percorrida em espiral.

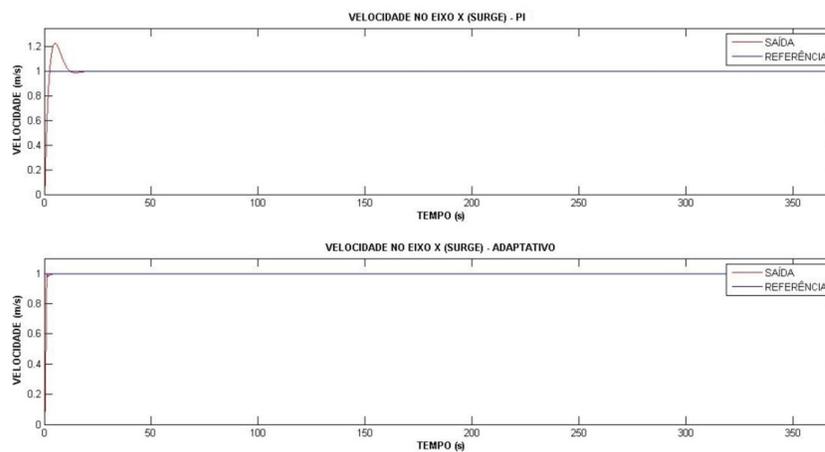


Figura 6-9 - Velocidade em *surge* para a trajetória em espiral.

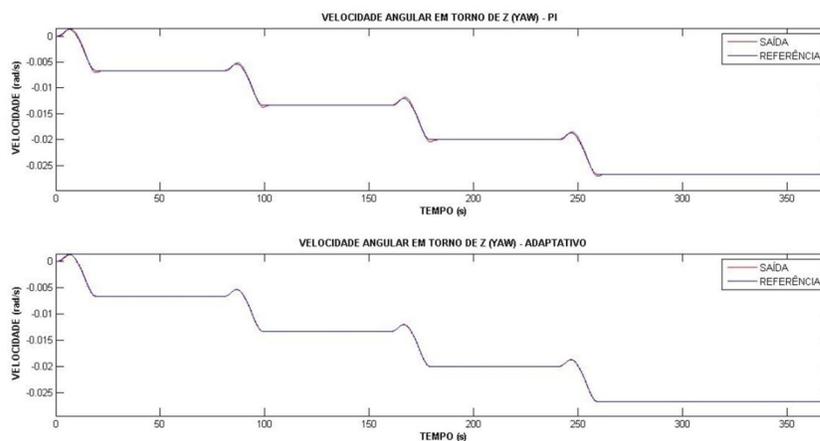


Figura 6-10 - Velocidade em *yaw* para a trajetória em espiral.

A fim de avaliar o desempenho dos controladores de forma objetiva, os valores dos erros quadráticos são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Métrica de erro quadrático para o caso sem perturbações.

TRAJETÓRIA	CONTROLADOR	GRAU DE LIBERDADE	ERRO
S	PI	<i>Surge</i>	71,7
S	PI	<i>Yaw</i>	$1,9 \times 10^{-4}$
S	Adaptativo	<i>Surge</i>	63,2
S	Adaptativo	<i>Yaw</i>	$0,22 \times 10^{-4}$
Espiral	PI	<i>Surge</i>	74,4

Espiral	PI	<i>Yaw</i>	$9,4 \times 10^{-5}$
Espiral	Adaptativo	<i>Surge</i>	63,8
Espiral	Adaptativo	<i>Yaw</i>	$2,3 \times 10^{-5}$

É importante observar que, embora as métricas mostrem uma superioridade do controlador adaptativo, sob o ponto de vista operacional (trajetória e gráficos de velocidade) o desempenho foi praticamente o mesmo. Desta forma, na ausência de perturbações, é fundamental levar isto em consideração, uma vez que o projeto de um controlador adaptativo baseado na teoria de *Lyapunov* é muito mais complexo do que o de um controlador PI.

### 6.3.1.2 ESFORÇO DE CONTROLE

Nesta seção são exibidos os gráficos dos sinais de controle para quando o sistema está operando sem o efeito da perturbação das correntes marítimas. A Figura 6-11 exhibe os sinais de controle para a trajetória em “S”, enquanto que a Figura 6-12 exhibe os sinais de controle para a trajetória em espiral.

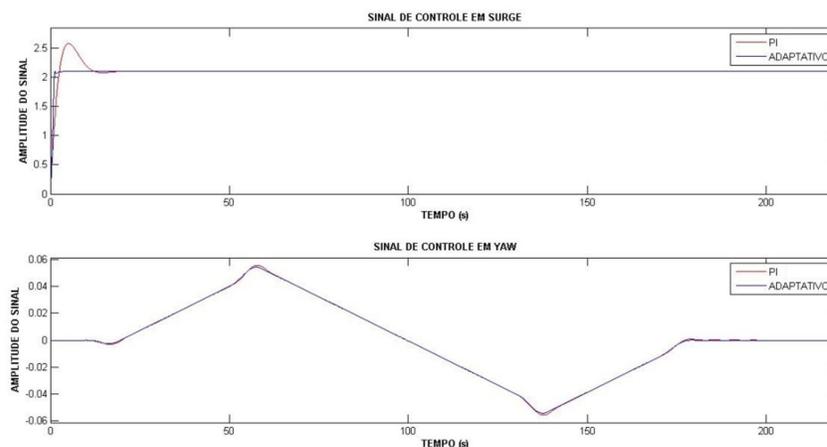


Figura 6-11 - Sinais de controle para a trajetória em "S".

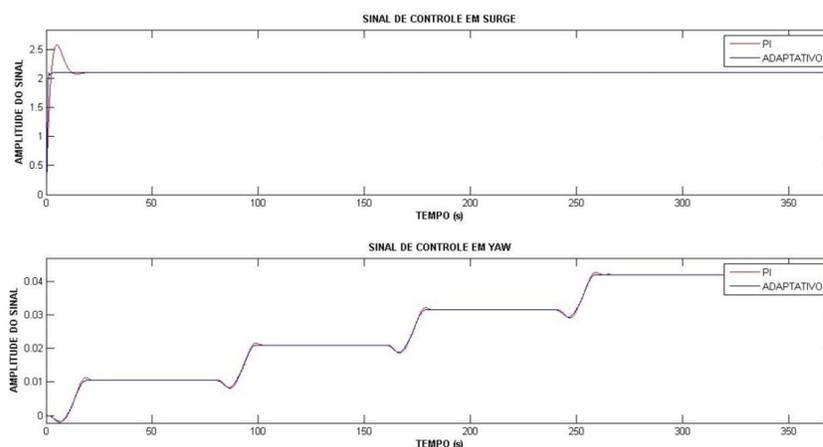


Figura 6-12 - Sinais de controle para a trajetória espiral.

Conforme pode ser visto na Figura 6-11 e Figura 6-12, o controlador PI apresentou um esforço de controle visivelmente maior em *surge*, devido ao sobressinal. No caso do controle em *yaw*, o desempenho foi similar.

### 6.3.2 SISTEMA COM PERTURBAÇÃO

#### 6.3.2.1 RESPOSTA DO SISTEMA

Nesta etapa da simulação, foi acrescentada a perturbação das correntes marítimas. É importante ressaltar que as correntes marítimas foram geradas de forma que variassem de maneira suave. Desta forma, espera-se que, apesar da perturbação, os controladores consigam seguir a referência de velocidade. Por outro lado, tendo em vista que a referência se dá em termos de velocidade, o erro de trajetória se acumula ao longo do tempo. Caso houvesse o interesse de se controlar também a trajetória do veículo, uma malha externa de controle de posição poderia ser utilizada no intuito de convergir a trajetória da referência e do veículo. Porém, isto foge à proposta inicial deste trabalho, que considerou apenas o controle de velocidade.

A trajetória percorrida considerando-se o primeiro vetor de referências é exibida na Figura 6-13. Na Figura 6-14 e na Figura 6-15, por sua vez, são exibidos os gráficos de velocidade para ambos os controladores.

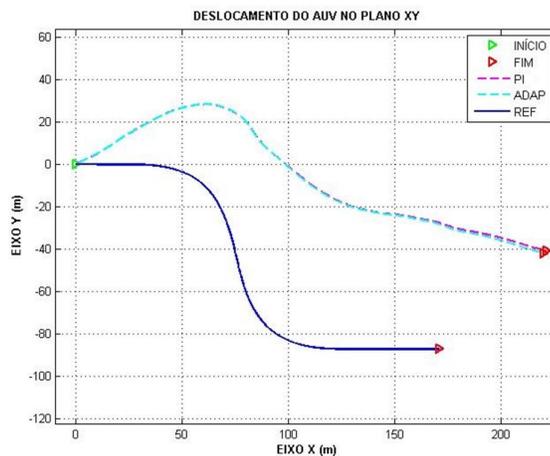


Figura 6-13 - Trajetória percorrida em "S".

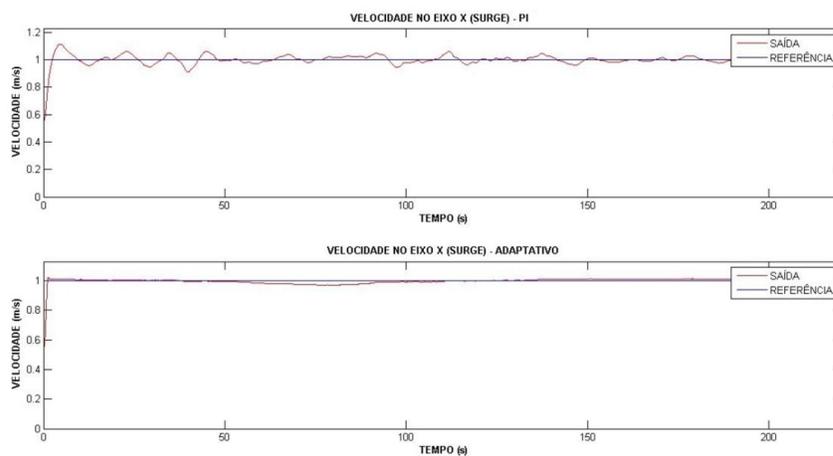


Figura 6-14 - Velocidade em *surge* para a trajetória em "S".

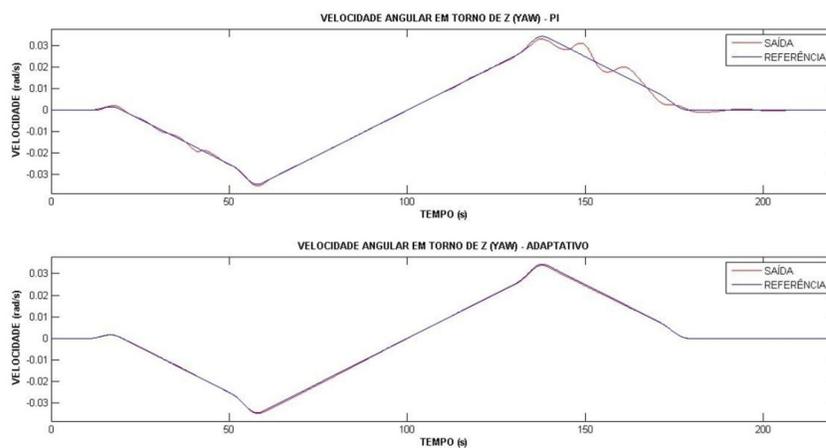


Figura 6-15 - Velocidade em *yaw* para a trajetória em "S".

No caso do segundo vetor de referências, a trajetória percorrida pelos controladores pode ser vista na Figura 6-16, enquanto que na Figura 6-17 e na Figura 6-18 podem ser vistos os gráficos de velocidade.

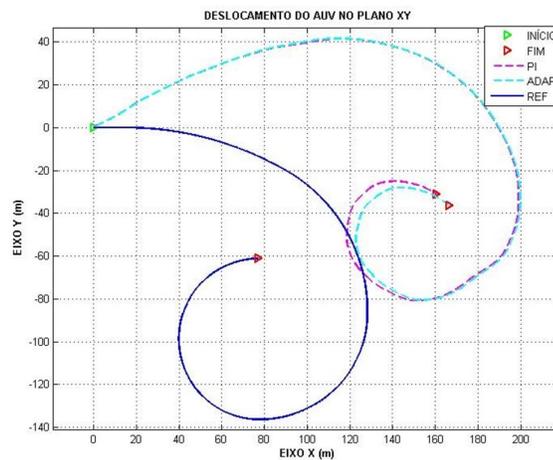


Figura 6-16 - Trajetória percorrida em espiral.

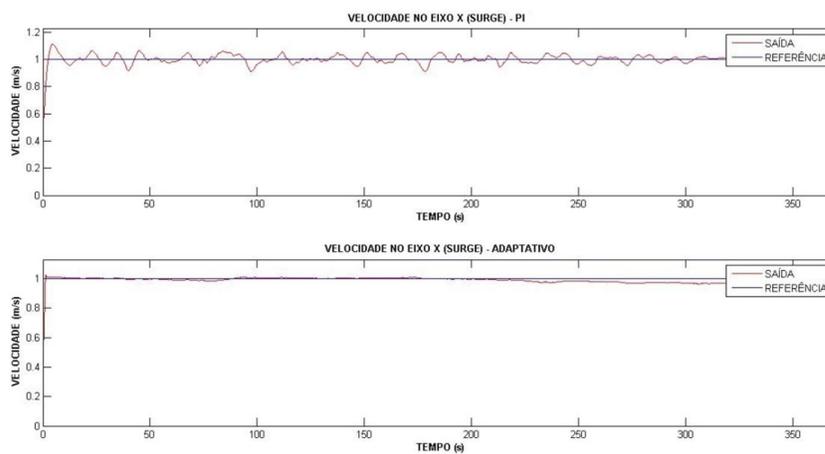


Figura 6-17 - Velocidade em surge para a trajetória em espiral

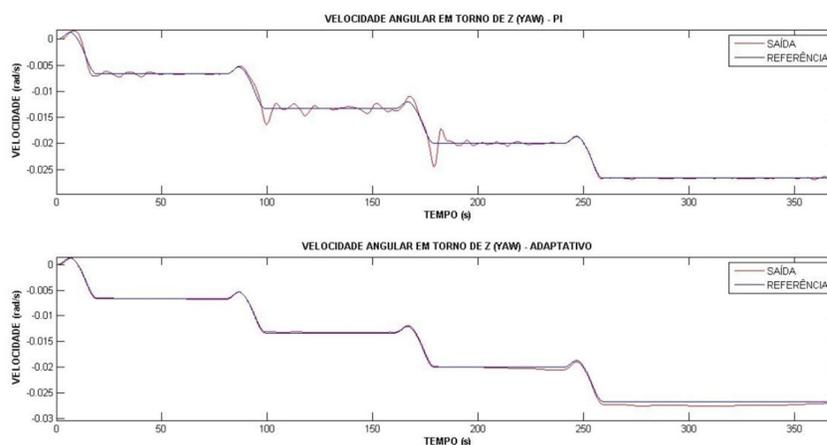


Figura 6-18 - Velocidade em yaw para a trajetória em espiral.

A fim de avaliar o desempenho dos controladores de forma objetiva, os valores dos erros quadráticos são apresentados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 - Métrica de erro quadrático para o caso com perturbações.

TRAJETÓRIA	CONTROLADOR	GRAU DE LIBERDADE	ERRO
S	PI	<i>Surge</i>	17,4
S	PI	<i>Yaw</i>	$6,8 \times 10^{-3}$
S	Adaptativo	<i>Surge</i>	13,7
S	Adaptativo	<i>Yaw</i>	$0,5 \times 10^{-3}$
Espiral	PI	<i>Surge</i>	15,2
Espiral	PI	<i>Yaw</i>	$2,7 \times 10^{-3}$
Espiral	Adaptativo	<i>Surge</i>	9,1
Espiral	Adaptativo	<i>Yaw</i>	$1,4 \times 10^{-3}$

Em primeiro lugar, é importante observar que, apesar da inclusão das correntes marítimas, os controladores não tenderam à instabilidade.

As trajetórias percorridas pelos dois controladores, que foram exibidas na Figura 6-13 e na Figura 6-16, não permitem tirar conclusões sobre o desempenho dos controladores, uma vez que ambas as trajetórias diferem muito da trajetória seguida pela referência, devido ao acúmulo do erro.

Por outro lado, os gráficos de velocidade, que foram exibidos na Figura 6-9, na Figura 6-10, na Figura 6-14 e na Figura 6-15, permitem visualizar uma superioridade do controlador adaptativo em relação ao controlador PI, o que é corroborado pelos valores encontrados pela métrica de erro quadrático que são exibidos na Tabela 6.2.

Nesta etapa das simulações, a superioridade do controlador adaptativo torna-se mais evidente, uma vez que os gráficos de velocidade do controlador PI apresentam maiores oscilações, além de ter sido verificado o pior desempenho do controlador PI segundo as métricas.

### 6.3.2.2 ESFORÇO DE CONTROLE

Nesta seção será analisado o comportamento dos esforços de controle para quando o sistema está sob efeito da perturbação das correntes marítimas. A Figura 6-19 exhibe os sinais de controle para a trajetória em “S”, enquanto que a Figura 6-20 exhibe os sinais de controle para a trajetória em espiral.

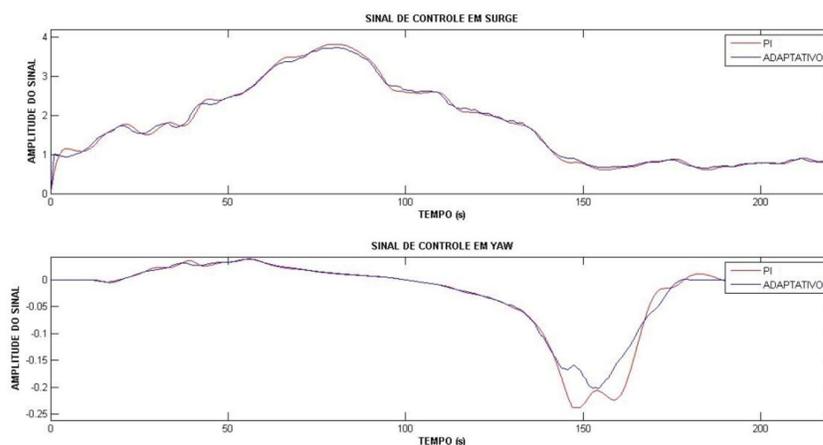


Figura 6-19 - Sinais de controle para a trajetória em "S".

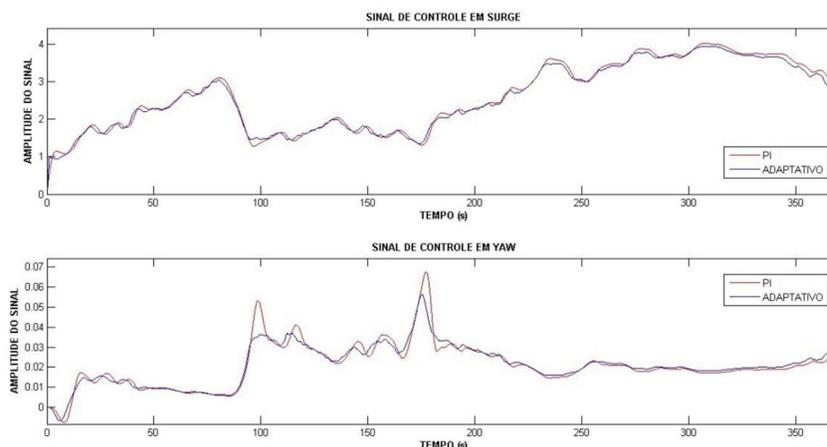


Figura 6-20 - Sinais de controle para a trajetória em espiral.

Como pode ser observado na Figura 6-19 e na Figura 6-20, os sinais de controle não apresentaram sobressaltos iniciais ou oscilações de alta frequência.

## 6.4 CENÁRIO II

Neste segundo cenário, a sintonia obtida no Cenário I foi mantida, e avaliou-se o desempenho de ambos os controladores agora para uma velocidade de operação igual a 2 m/s. Nesta etapa das simulações, optou-se por observar o comportamento dos controladores somente para o caso com perturbações, pois este é o mais crítico.

### 6.4.1 RESPOSTA DO SISTEMA

A trajetória percorrida considerando-se o primeiro vetor de referências é exibida na Figura 6-21. Na Figura 6-22 e na Figura 6-23, por sua vez, são exibidos os gráficos de velocidade para ambos os controladores.

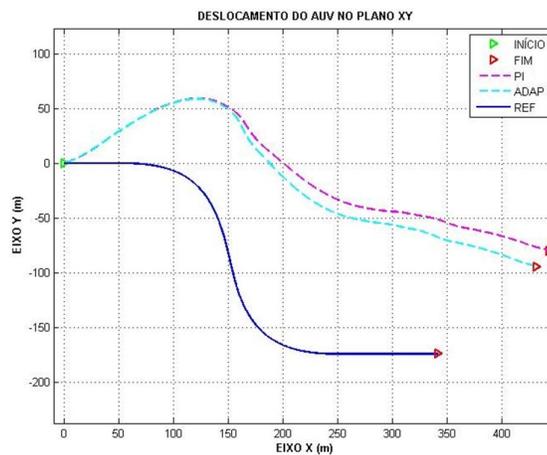


Figura 6-21 - Trajetória percorrida em "S".

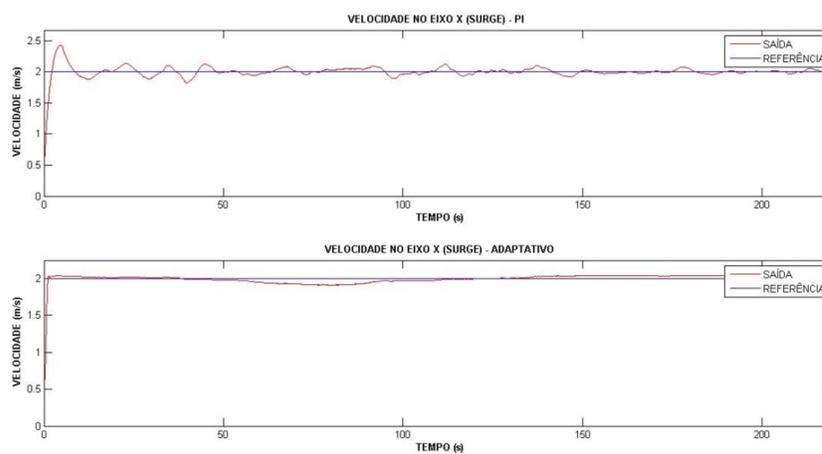


Figura 6-22 - Velocidade em *surge* para a trajetória em "S".

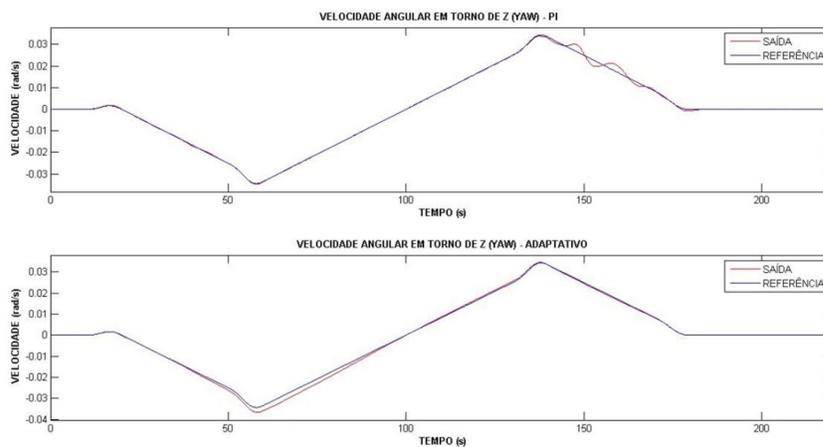


Figura 6-23 - Velocidade em *yaw* para a trajetória em "S".

No caso do segundo vetor de referências, a trajetória percorrida pelos controladores pode ser vista na Figura 6-24, enquanto que na Figura 6-25 e na Figura 6-26 podem ser vistos os gráficos de velocidade.

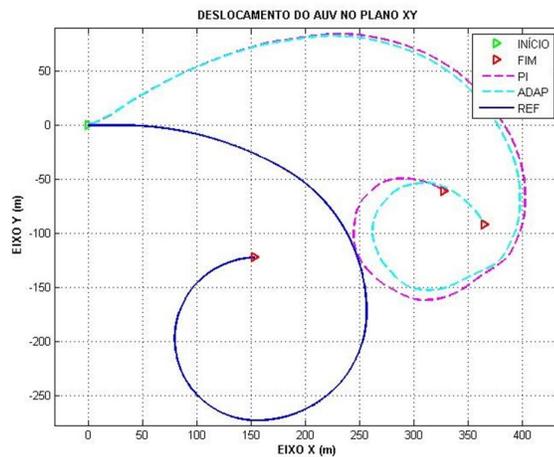


Figura 6-24 - Trajetória percorrida em espiral.

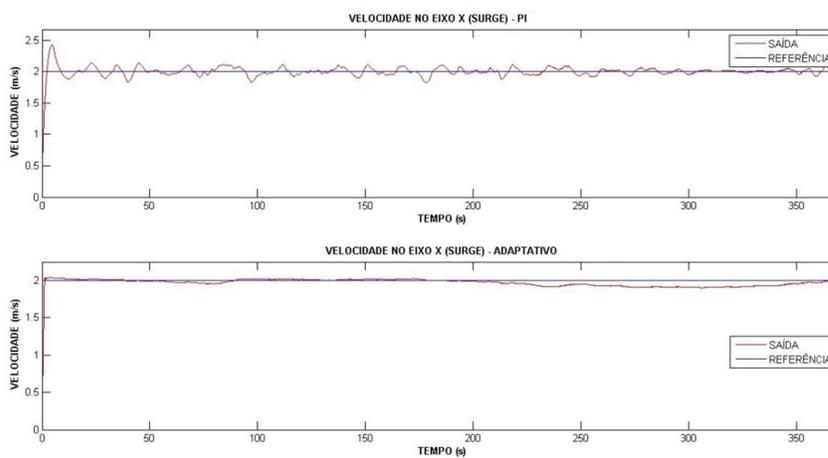


Figura 6-25 - Velocidade em *surge* para a trajetória em espiral

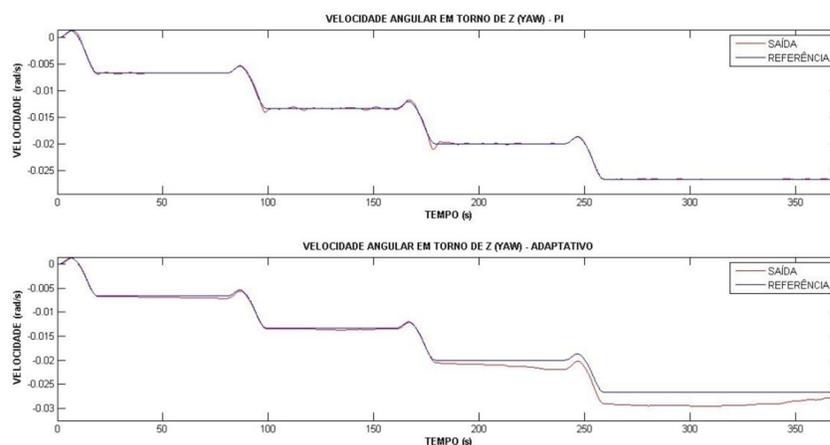


Figura 6-26 - Velocidade em yaw para a trajetória em espiral.

Tabela 6.3 - Métrica de erro quadrático.

TRAJETÓRIA	CONTROLADOR	GRAU DE LIBERDADE	ERRO
S	PI	<i>Surge</i>	147,6
S	PI	<i>Yaw</i>	$1,9 \times 10^{-2}$
S	Adaptativo	<i>Surge</i>	129,3
S	Adaptativo	<i>Yaw</i>	$4,5 \times 10^{-2}$
Espiral	PI	<i>Surge</i>	111,3
Espiral	PI	<i>Yaw</i>	$1,9 \times 10^{-4}$
Espiral	Adaptativo	<i>Surge</i>	91,9
Espiral	Adaptativo	<i>Yaw</i>	$237 \times 10^{-4}$

Neste novo cenário houve uma piora no controle da velocidade em *yaw* do controlador adaptativo em relação ao controlador PI, enquanto que o seu controle em *surge* continuou superior ao do controlador PI. Essa piora pode estar relacionada com o fato de o controlador adaptativo ser baseado em modelo e, devido à mudança na velocidade de operação, o modelo do veículo também sofreu alteração.

Assim, neste novo cenário, não houve uma supremacia clara por parte de um dos controladores.

## 6.4.2 ESFORÇO DE CONTROLE

Os gráficos são aqui exibidos no intuito de observar a ausência de sobressaltos iniciais e ruídos nos sinais de controle. A Figura 6-27 exhibe os sinais de controle para a trajetória em “S”, enquanto que a Figura 6-28 exhibe os sinais de controle para a trajetória em espiral.

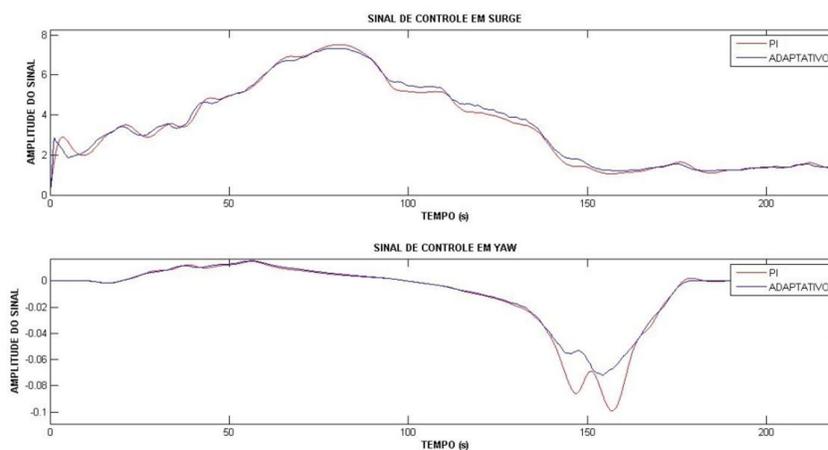


Figura 6-27 - Sinais de controle para a trajetória em "S".

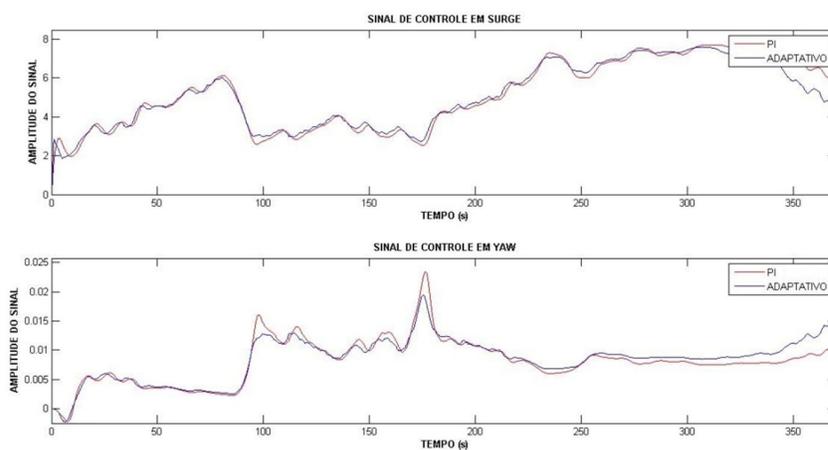


Figura 6-28 - Sinais de controle para a trajetória em espiral.

## 7 CONCLUSÕES

### 7.1 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho permitiu obter conclusões com relação ao desempenho dos controladores adaptativo e PI para o caso servo e servo-regulatório de um veículo submarino, sendo a perturbação externa uma corrente marítima variável.

No caso servo, pode ser verificada a equiparidade entre o desempenho de ambos os controladores. Este cenário sem perturbações externas, porém, é muito otimista, visto que o ambiente marítimo é dinâmico e está repleto de fatores que podem afetar o desempenho do veículo submarino, como as próprias correntes marítimas, por exemplo.

No caso servo-regulatório, por outro lado, ao incorporar o efeito das correntes marítimas, a análise de desempenho mostra-se mais enriquecedora. Neste cenário, pode ser observado que, para um ponto de operação específico, o controlador adaptativo apresentou um desempenho superior ao do controlador PI. Essa vantagem de desempenho, porém, não se repetiu quando houve uma mudança no ponto de operação mantendo-se a sintonia anterior.

Durante a realização deste trabalho também ficaram evidentes algumas desvantagens do controlador adaptativo proposto frente ao controlador PI, que também devem ser levadas em conta na análise dos controladores. As principais desvantagens observadas foram as seguintes: a complexidade na implementação do controlador adaptativo é superior à do controlador PI; a correção de problemas é menos intuitiva, visto que a estrutura do controlador é mais complexa; a saturação mostrou-se criticamente prejudicial ao desempenho do controlador adaptativo.

Embora o problema com a saturação inicial tenha sido resolvido através do filtro passa-baixa, pode haver problemas caso a saturação ocorra durante operação normal do veículo, devido a valores de referência elevados. Portanto, ao se trabalhar com este controlador adaptativo, é preciso estar atento aos valores de referência fornecidos, para não provocar a saturação do atuador.

A comprovação da eficácia do controlador PI é importante, pois, o projeto e implementação deste controlador são muito mais simples do que as do controlador adaptativo em questão. Além do mais, a lei de controle adaptativa é baseada no modelo do sistema e, portanto, a sua robustez é questionável. Isso se dá, pois, diante de incertezas paramétricas do

modelo, a lei de controle poderá estar acrescentando mais não linearidades ao sistema, prejudicando a sua estabilidade.

## 7.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros sugere-se expandir os testes realizados neste trabalho para o deslocamento no plano tridimensional, e não apenas no plano horizontal. Além dos mais, as simulações podem incorporar o efeito de outras perturbações, como vórtices e correntes de convecção, a fim de representar com melhor verossimilhança o ambiente de operação real. Além disso, poderia ser acrescentada a análise de robustez dos controladores, a fim de avaliar o seu desempenho frente a incertezas paramétricas do modelo.

Em um segundo momento, sugere-se realizar os testes em um tanque onde se possa controlar as variáveis do ambiente (temperatura, pressão, geração de correntes, etc.). Estes testes poderiam abarcar a determinação empírica dos coeficientes hidrodinâmicos do modelo matemático do veículo, assim como, a análise comparativa de desempenho entre os controladores utilizados neste trabalho.

Por fim, os mesmos testes poderiam ser realizados em alto mar, a fim de avaliar o seu desempenho no ambiente normal de operação.

## 8 REFERÊNCIAS

AAGE, C. & SMITT, L. W. **Hydrodynamic manoeuvrability data of a flatfish type AUV**. In OCEANS'94.'Oceans Engineering for Today's Technology and Tomorrow's Preservation.'Proceedings, vol. 3, pp. III-425. IEEE, 1994;

AGUIAR, A. P., PASCOAL, A. M. **Dynamic Positioning of an Underactuated AUV in the Presence of a Constant Unknown Ocean Current Disturbance**. 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain, 2002;

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I., FIGUEIREDO, V. L., & WETZLER, H. G. **Álgebra linear**. (Vol. 3). Harper & Row do Brasil, 1980.

CACCIA, M., & VERUGGIO, G.. **Guidance and Control of a Reconfigurable Unmanned Underwater Vehicle**. Control Engineering Practice, 2000.

CAHARIJA, W., PETTERSEN, K. Y., GRAVDAHL, J. T. & BØRHAUG, E. **Path Following of Underactuated Autonomous Underwater Vehicles in the Presence of Ocean Currents**. 51st IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, USA, 2012;

DAVIS, R. E., ERIKSEN, C. C., & JONES, C. P. **Autonomous Buoyancy-Driven Underwater Gliders**. The technology and applications of autonomous underwater vehicles, 37-58, 2002.

EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. **Plano Decenal de Expansão de Energia 2021**. Ministério de Minas e Energia, Brasil, 2012;

ENCARNAÇÃO, P. & PASCOAL, A. **3D Path Following for Autonomous Underwater Vehicles**. Proceedings of the 39<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Australia, 2000;

FAPESP. **Poli-USP Desenvolve Veículo Autônomo Subaquático**. Visitado em 22/04/14, <http://revistapesquisa.fapesp.br/2013/04/25/poli-usp-desenvolve-veiculo-autonomo-subaquatico-2/>;

FOSSSEN, T. I. **Nonlinear Modelling and Control of Underwater Vehicles**. Tese de Doutorado, Dept. of Engineering Cybernetics, The Norwegian of Technology. Trondheim, Norway, 1991;

FOSSSEN, T. I. **Guidance and Control of Ocean Vehicles**. John Wiley & Sons, Trondheim, Norway, 1994;

FOSSSEN, T. I. **Marine Control Systems – Guidance, Navigation and Control of Shippgs, Rigs and Underwater Vehicles**. Marine Cybernetics, Trondheim, Norway, 2002;

GARAU, B., ALVAREZ, A. & OLIVER, G. **Path planning of autonomous underwater vehicles in current fields with complex spatial variability: an A\* approach**. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on (pp. 194-198). IEEE, 2005;

HADDAD, E. A. & GIUBERTI A. C. **Economic Impacts of Natural Resources on a Regional Economy: The Case of the Pre-Salt Oil Discoveries in Espírito Santo, Brazil**. Economy of Region/Ekonomika Regiona 1, 2014;

HOERNER, S. F. **Fluid-Dynamic Drag – theoretical, experimental and statistical information**. Publicado pelo autor, Estados Unidos da América, 1965;

IMLAY, F. H. **The Complete Expressions for Added Mass for a Rigid Body Moving in an Ideal Fluid**. Technical Report DTMB 1528. Washington D.C., 1961;

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Prentice Hall, New Jersey, 2002;

KULA, L. W. & YOVANOVICH, M. M. **Characteristic Length of Complex Bodies for Transient Conduction**. In ASME/JSME Thermal Engineering Proceedings, Volume 1. 1991;

JALVING, B., & STORKERSEN, N. **The Control System of an Autonomous Underwater Vehicle**. In Control Applications, 1994., Proceedings of the Third IEEE Conference on (pp. 851-856), 1994;

LE, K. D., NGUYEN, H. D. & RANMUTHUGALA, S. D. **A Self-tuning Nonlinear PID Controller for a Three-Thruster Remotely Operated Underwater Vehicle**. Proceedings of the Second Vietnam Conference on Control and Automation, 2013;

LEWIS, E. V., editor. **Principles of Naval Architecture**. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, New Jersey, 1988;

MIT OpenCourseWare. **18.06SC Linear Algebra**. Sumário da Palestra. Massachusetts Institute of Technology, 2011;

MSS. **Marine Systems Simulator (2010)**. Visitado em 19/12/2013, <http://www.marinecontrol.org>;

PRESTERO, T. T. J. **Verification of a six-degree of freedom simulation model for the REMUS autonomous underwater vehicle**. Dissertação de PhD, Massachusetts Institute of Technology, 2001;

PHILLIPS, A. B., TURNOCK, S. R., & FURLONG, M. **Comparisons of CFD simulations and in-service data for the self propelled performance of an Autonomous Underwater Vehicle**. 27th Symposium on Naval Hydrodynamics Seoul, Korea, 5-10 October 2008;

DA SILVA, J. E., TERRA, B., MARTINS, R., & SOUSA, J. B. **Modeling and simulation of the lauv autonomous underwater vehicle**. In 13th IEEE IFAC International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics. 2007;

SOARES, S. D. **O Veículo Submarino Autônomo na Conquista do Conhecimento**. III Simpósio de Ciência, Tecnologia e Inovação Marinha, 2013;

SNAME, The Society of Naval Architects and Marine Engineers. **Nomenclature for Treating the Motion of a Submerged Body Through a Fluid**. Technical and Research Bulletin No. 1-5, 1950;

SOUZA, E. C. **Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003;

YANAI, H., TAKEUCHI, K., TAKANE, Y. **Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition**. Springer, 2011;

WANG, Y., YAN, W., GAO, B. & CUI, R. **Backstepping-Based Path Following Control of an Underactuated Autonomous Underwater Vehicle**. Information and Automation, International Conference on (pp. 466-471). IEEE, 2009;

WEISSTEIN, E. W. **Eric Weissten's World of Physics**. Visitado em 19/04/2014, <http://scienceworld.wolfram.com/physics/MomentofInertiaEllipsoid.html>.

## APÊNDICE A – MATRIZ PSEUDO-INVERSA

Uma matriz  $A^{-1}$  é dita inversa por ambos os lados com relação à matriz  $A$ , quando a relação apresentada em (131) é verdadeira (MIT, 2011).

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (131)$$

Esta matriz também é chamada simplesmente de inversa. A matriz  $A$  possui matriz inversa se, e somente se, ela for quadrada e tiver posto completo.

Matrizes retangulares, portanto, não possuem inversa. Por outro lado, as matrizes retangulares estão associadas a matrizes pseudo-inversas.

Definindo-se uma matriz  $A \in R^{m \times n}$ , sendo  $m > n$ , pode-se definir uma matriz pseudo-inversa à esquerda, conforme é apresentado em (132) (MIT, 2011).

$$A_{Esq}^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (132)$$

Esta matriz é dita pseudo-inversa à esquerda pois atende a propriedade apresentada em (133) (MIT, 2011)..

$$\begin{cases} A_{Esq}^+ A = I \\ AA_{Esq}^+ \neq I \end{cases} \quad (133)$$

De forma análoga, caso  $m < n$ , tem-se a matriz pseudo-inversa à direita, conforme apresentada em (134) (MIT, 2011).

$$A_{Dir}^+ = A^T (AA^T)^{-1} \quad (134)$$

E então a propriedade apresentada em (135) é válida (MIT, 2011).

$$\begin{cases} AA_{Dir}^+ = I \\ A_{Dir}^+ A \neq I \end{cases} \quad (135)$$

No caso da matriz  $B_1$  apresentada em (104), a mesma possui matriz pseudo-inversa à esquerda, uma vez que a quantidade de linhas ( $m$ ) é maior do que a quantidade de colunas ( $n$ ). A matriz pseudo-inversa de  $B_1$  é apresentada em (136).

$$B_1^+(v, U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho D^4 |U_x| \alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Z_{uuds}}{K_1} & 0 & \frac{M_{uuds}}{K_1} & 0 \\ 0 & \frac{Y_{uudr}}{K_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{N_{uudr}}{K_2} \end{bmatrix} \quad (136)$$

sendo

$$\begin{cases} K_1 = u^2 (M_{uuds}^2 + Z_{uuds}^2) \\ K_2 = u^2 (N_{uudr}^2 + Y_{uudr}^2) \end{cases} \quad (137)$$

## APÊNDICE B – MATRIZ DE PROJEÇÃO ORTOGONAL

A matriz de projeção ortogonal de um plano, como o próprio nome diz, é uma matriz capaz de projetar vetores ortogonalmente em relação a um dado plano. Um exemplo em  $\mathbb{R}^2$  da projeção ortogonal de um vetor em relação a outro vetor é apresentado na Figura I.

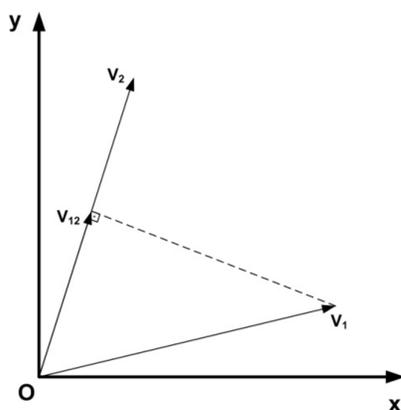


Figura I - Projeção ortogonal de vetores.

Note que a projeção ortogonal de  $\overrightarrow{OV_1}$  em  $\overrightarrow{OV_2}$  é igual a  $\overrightarrow{OV_{12}}$ .

Seja  $A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$ , sendo que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  e são linearmente independentes. Então, o projetor ortogonal do espaço vetorial  $V$ , que é definido pelos vetores coluna de  $A$ , pode ser calculado conforme é apresentado na equação (138) (YANAI, 2011).

$$P = A \cdot \overbrace{(A^T A)^{-1} A^T}^{A_{Esq}^+} \quad (138)$$

Note que, conforme destacado em (138), a matriz de projeção ortogonal pode ser encontrada através do produto de  $A$  pela sua matriz pseudo-inversa, conforme apresentado na expressão (139).

$$P_V = AA_{Esq}^+ \quad (139)$$

Algumas propriedades notáveis da matriz de projeção ortogonal são apresentadas na equação (140) (YANAI, 2011).

$$\begin{cases} P = P^2 \text{ (idempotente)} \\ P = P^T \text{ (simétrica)} \\ \text{Se } x \in V, \text{ então } P_V x = x \end{cases} \quad (140)$$

A terceira propriedade apresentada na expressão (140) diz que a projeção ortogonal de um vetor em um espaço vetorial que o contém é o próprio vetor.

De acordo com o que foi apresentado na equação (139), pode-se concluir que, na equação (110), o termo  $B_1 B_1^+$  é um projetor ortogonal.

A partir das equações (104) e (136), pode-se encontrar o projetor ortogonal do espaço vetorial  $V$  definido pelos vetores coluna de  $B_1$ , conforme apresentado na expressão (141).

$$P_V = B_1 B_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Y_{uudr}^2}{C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{N_{uudr} Y_{uudr}}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{Z_{uuds}^2}{C_1} & 0 & \frac{M_{uuds} Z_{uuds}}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_{uuds} Z_{uuds}}{C_1} & 0 & \frac{M_{uuds}^2}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{N_{uudr} Y_{uudr}}{C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{N_{uuds}^2}{C_2} \end{bmatrix} \quad (141)$$

sendo

$$\begin{cases} C_1 = M_{uuds}^2 + Z_{uuds}^2 \\ C_2 = N_{uudr}^2 + Y_{uudr}^2 \end{cases} \quad (142)$$

Multiplicando-se  $P_V$  por  $B_2$ , de acordo com os seus valores apresentados respectivamente em (141) e (105), obtemos o resultado apresentado na equação (143).

$$P_V B_2 = \begin{bmatrix} \rho D^3 |U_x| \alpha_2 (1-w) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Y_{uudr} u C_4}{C_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{Y_{uudr} u C_5}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{Z_{uuds} u C_3}{C_1} & 0 & \frac{Z_{uuds} u C_6}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_{uuds} u C_3}{C_1} & 0 & \frac{M_{uuds} u C_6}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{N_{uudr} u C_4}{C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{N_{uudr} u C_5}{C_2} \end{bmatrix} \quad (143)$$

sendo

$$\begin{cases} C_1 = M_{uuds}^2 + Z_{uuds}^2 \\ C_2 = N_{uudr}^2 + Y_{uudr}^2 \\ C_3 = Z_{uuds}Z_{uwf} + M_{uuds}M_{uwf} \\ C_4 = Y_{uudr}Y_{uvf} + N_{uudr}N_{uvf} \\ C_5 = Y_{urf}Y_{uudr} + N_{urf}N_{uudr} \\ C_6 = Z_{uqf}Z_{uuds} + M_{uqf}M_{uuds} \end{cases} \quad (144)$$

Porém, considerando-se as similaridades existentes entre os coeficientes, conforme apresentadas em (100) e (101), e realizando-se as manipulações matemáticas necessárias, pode-se provar que a equação (143) fica reduzida a expressão (145).

$$P_V B_2 = \begin{bmatrix} \rho D^3 |U_x| \alpha_2 (1-w) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{uvf} \cdot u & 0 & 0 & 0 & Y_{urf} \cdot u \\ 0 & 0 & Z_{uwf} \cdot u & 0 & Z_{uqf} \cdot u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{uwf} \cdot u & 0 & M_{uqf} \cdot u & 0 \\ 0 & N_{uvf} \cdot u & 0 & 0 & 0 & N_{urf} \cdot u \end{bmatrix} \quad (145)$$

E, como pode ser observado, a expressão (145) é igual ao valor de  $B_2$ , que é apresentado na equação (105). Então, conforme apresentado pela 3ª propriedade na expressão (140), isto quer dizer que os vetores coluna que compõem  $B_2$  pertencem ao espaço vetorial do projetor ortogonal  $P_V$ , e, portanto, as projeções ortogonais destes vetores em  $V$  são iguais aos próprios vetores, conforme é exibido na expressão (146).

$$B_1 B_1^+ B_2 = B_2 \quad (146)$$

Por fim, manipulando-se o segundo termo da equação (110), chega-se à conclusão apresentada na expressão (147).

$$\left( B_2 - \overbrace{B_1 B_1^+ B_2}^{B_2} \right) v = 0 \quad (147)$$

## APÊNDICE C – REGRA DE CRAMER

De acordo com BOLDRINI (1980), um sistema linear pode ser classificado de três formas:

- Possível e determinado – este tipo de sistema possui uma solução única (ex.: retas concorrentes, ver Figura II);
- Possível e indeterminado – este tipo de sistema possui um conjunto infinito de soluções (ex.: retas coincidentes, ver Figura II);
- Impossível – este tipo de sistema não possui soluções (ex.: retas paralelas, ver Figura II).

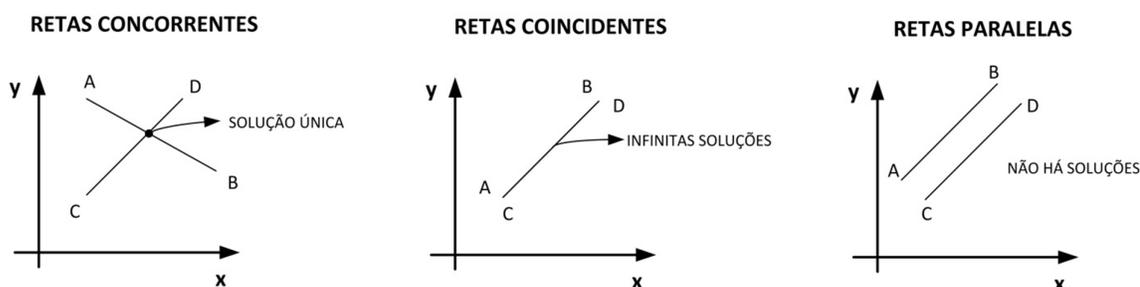


Figura II - Ilustração da classificação de sistemas lineares para um par de retas.

Considere o sistema de equações lineares apresentado em (148).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (148)$$

De acordo com a Regra de *Cramer* (BOLDRINI, 1980), as soluções desse sistema são dadas pela expressão (149).

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\Delta x_1}{\Delta} \\
 x_2 &= \frac{\Delta x_2}{\Delta} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_n &= \frac{\Delta x_n}{\Delta}
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

sendo que:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{150}$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{151}$$

$$\Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{152}$$

e:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{153}$$

A partir da Regra de Cramer, é possível determinar o tipo de sistema linear em questão da seguinte forma (BOLDRINI, 1980):

- Possível e determinado –  $\Delta \neq 0$ ;
- Possível e indeterminado –  $\Delta x_i = 0$  e  $\Delta = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;
- Impossível –  $\Delta x_i \neq 0$  e  $\Delta = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;